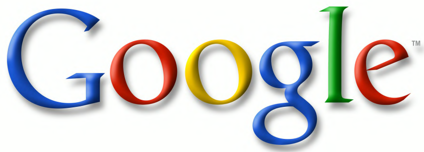


P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen,** der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Aus-



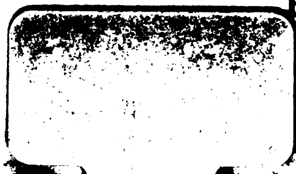
gen Lehrenden und Lernenden
erlich sein werden. **Verlags-**
hlägigem Gebiete werden mir
nliche Werke über denselben
nd, stets sehr willkommen sein.
gen mache ich ganz besonders
aften zu München und Wien
zu Göttingen herausgegebene
Wissenschaften aufmerksam,
a, die Analysis, die Geometrie,
nd Geophysik und die Astro-
nd historische, philosophische
ein Generalregister zu obigen

ie mathematischen und natur-
lags, als da sind: Die **Mathe-**
athematica, das **Archiv der**
esberichte der Deutschen
chrift für Mathematik und
ik, die **Zeitschrift für mathe-**
en Unterricht, ferner **Natur**
en naturkundlichen Unterricht
chrift u. a.
rzen Zwischenräumen: **„Mit-**
B. G. Teubner“. Diese „Mit-
Exemplaren sowohl im In- als
n, sollen das Publikum, welches
, von den erschienenen, unter
ereiteten Unternehmungen des
und sind ebenso wie das bis
vei- bis dreimal neu gedruckte
ubner auf dem Gebiete der
Naturwissenschaften nebst
S. gr. 8], sowie der Nachtrag

1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.



KURZE EINLEITUNG

IN DIE

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

(„INFINITESIMALRECHNUNG“)

VON

DR. PHIL. IRVING FISHER

PROFESSOR DER NATIONALÖKONOMIE AN DER YALE UNIVERSITÄT

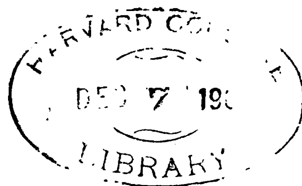
AUS DER DURCH MEHRERE VERBESSERUNGEN
DES VERFASSERS VERVOLLSTÄNDIGTEN DRITTEN
ENGLISCHEN AUSGABE ÜBERSETZT VON

N. PINKUS

MIT 11 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904


HARVARD CO
DEC 7 19
LIBRARY

Vorrede.

Dieses Bändchen enthält das Wesentliche meiner Vorlesungen, mit deren Hilfe ich Fortgeschrittenere meiner Zuhörer in einen Kursus der modernen Volkswirtschaftslehre einzuführen pflegte. Ich konnte weder ein für meinen Zweck genügend kurzes Lehrbuch, noch eins, welches alles Wesentliche in gewünschtem Maße hervorhebt, finden. Jedoch war bei Bearbeitung meiner Notizen zur Veröffentlichung mein Hauptziel nicht, ein Buch für den Schulgebrauch zu schaffen. Es muß zugegeben werden, daß bis jetzt nur sehr wenige Dozenten der Nationalökonomie geneigt sind, ihre Zuhörer in der mathematischen Ausdrucksweise anzusprechen. Ich war nicht so sehr auf das Schulzimmer, wie auf das Studierzimmer bedacht. Sowohl die Lehrer, wie auch die Studierenden, so wenig sie sich um ein mathematisches Medium für ihre eigenen Gedanken auch kümmern mögen, empfinden doch immer mehr dessen Notwendigkeit, um Gedanken anderer zu verstehen. Ich habe öfters Anfragen erhalten — was zweifelsohne auch mit anderen Lehrern der Fall war — wegen eines Buches, das einer Person ohne spezielle mathematische Vorbildung oder Begabung das Verständnis der Werke von Jevons, Walras, Marshall und Pareto oder der fortwährend in „Economic Journal", „Journal of the Royal Statistical Society", „Giornale degli Economisti" u. a. erscheinenden mathematischen Artikel ermöglichen könnte. Solch ein Buch habe ich eben zu schreiben versucht.

Die unmittelbare Veranlassung zu dessen Veröffentlichung hat das Erscheinen von Cournots *„Principes mathématiques de la théorie des richesses"* in der englischen Sprache in Professor Ashleys Serie „Economic Classics" gegeben. Der Nichtmathematiker kann beim Lesen dieser meisterhaften kleinen Denkschrift nur die allgemeine Richtung des Gedankenganges zu verstehen erwarten. Wenn er denselben ebenso anregend findet, wie es

bei den meisten Lesern der Fall gewesen ist, so wird er wohl das Bedürfnis empfinden, die in der Schrift gebrauchten Bezeichnungen und Verfahren eingehend kennen zu lernen.

Ich habe versucht, den mannigfaltigen Bedürfnissen verschiedener Leser gewissermaßen entgegenzukommen, indem ich zwei Druckarten gebrauchte. Wenn erwünscht, kann das Feingedruckte beim ersten Lesen meistenteils und beim zweiten sogar gänzlich ausgelassen werden. Es wird jedoch dem Leser empfohlen, nicht alles von den Beispielen unberücksichtigt zu lassen.

Obwohl hauptsächlich für Studierende der Nationalökonomie bestimmt, ist dies Buch doch gleichfalls für den Gebrauch derjenigen geeignet, die einen kurzen Kursus der „Infinitesimalrechnung“ als Gegenstand der allgemeinen Bildung zu haben wünschen. Ich erdreiste mich daher zu hoffen, daß die Dozenten der Mathematik es für einen nützlichen Leitfaden in den für den „allgemeinen Studenten“ bestimmten Vorlesungen halten werden. Schon lange war ich der Ansicht, daß die Grundbegriffe und Verfahren der Infinitesimalrechnung von größerem erzieherischem Wert sind, als die der analytischen Geometrie oder Trigonometrie, welche gegenwärtig eine bedeutende Stelle in unseren Schul- und Universitätsprogrammen einnehmen. Überdies werden sie doch fast ebenso leicht gelernt, und bei weitem nicht so leicht vergessen.

New Haven, Conn., September 1897. **Irving Fisher.**

Vorrede zur deutschen Ausgabe.

Der vorliegenden Übersetzung liegt die dritte amerikanische Auflage (1901) zugrunde. Es sind viele kleine Änderungen vorgenommen worden, von denen die meisten von meinem Freunde, Professor James Pierpont, dem ich für seine freundlichen Ratschläge tiefen Dank schulde, angeregt worden sind.

New Haven, Conn., U. S. A.
Oktober 1903. **Irving Fisher.**

Vorrede des Übersetzers.

Der Verfasser wendet sich in erster Linie an diejenigen Leser, denen daran gelegen ist, sich in kurzer Zeit mit den Hauptsätzen der Differential- und Integralrechnung vertraut zu machen. Der Umfang des vorliegenden Büchleins ist der beste Beweis dafür, daß es die eigentlichen Lehrbücher nicht ersetzen will. Dem Mathematiker soll es höchstens als Einleitung in sein Fachstudium dienen, die ihm eine knappe Übersicht über das Ganze der Infinitesimalrechnung und deren Hauptanwendungen zu geben vermag. Vor allem ist aber dieses im besten Sinne des Wortes populäre Buch auf die Bedürfnisse des Nichtmathematikers zugeschnitten, dem die rasche und zweckmäßige Orientierung in den Hilfsmitteln der höheren Mathematik so viel Schwierigkeiten bereitet. Am meisten dürfte dies Büchlein wohl den Statistikern und Nationalökonomen willkommen sein, für die durch dasselbe eine empfindlich werdende Lücke der einschlägigen Literatur ausgefüllt wird. Die mangelhafte Verbreitung mathematischer Kenntnisse, die sich z. B. in den offiziellen Statistiken so fühlbar macht, und anderseits die immer noch ausbleibende Stellungnahme gegenüber der mathematischen Schule der Volkswirtschaftslehre sind, nebst manchen anderen, Übelstände, die der überwiegend und einseitig juristischen Vorbildung der Kameralisten zuzuschreiben sind. Hierin Wandel zu schaffen wäre der vornehmste Zweck, den sich der Verfasser sowohl wie auch der Übersetzer gesetzt haben.

Göttingen, Juni 1904. N. P.

Inhaltsverzeichnis.

Infinitesimalrechnung.

Kapitel I.

Die allgemeine Methode der Differentiation.

1. Die Infinitesimalrechnung behandelt die Grenzverhältnisse verschwindender Größen. Diese Definition kann jedoch erst bei einer gewissen Vertrautheit mit den „Grenzverhältnissen" verständlich werden.

2. Der Begriff eines Grenz- oder Endverhältnisses ist in vielen wohlbekannten Beziehungen grundlegend. Es ist ohne denselben unmöglich, eine deutliche Vorstellung von der *Geschwindigkeit* eines Körpers *in einem Zeitpunkt* zu gewinnen. Die *durchschnittliche* Geschwindigkeit des Körpers während eines Zeitabschnitts kann ohne weiteres als der Quotient des während dieses Zeitabschnitts zurückgelegten Weges durch die für die Durchlaufung desselben verwendete Zeit bestimmt werden. Wenn ein Dampfer den atlantischen Ozean (3000 Meilen) in 6 Tagen passiert, pflegen wir zu sagen, daß die *durchschnittliche* Geschwindigkeit $3000 : 6$, oder 500 Meilen täglich beträgt. Dies berichtet uns aber nichts über die Geschwindigkeit in verschiedenen Punkten der Fahrt bei Gegenwinden, Stürmen und anderen günstigen oder ungünstigen Bedingungen. Wie groß ist, zum Beispiel, die Geschwindigkeit mittags am dritten Tage nach der Abfahrt gewesen? Wir können die erste Annäherung des gewünschten Resultats bekommen, indem wir die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem kurzen Zeitraume nach dem gegebenen Moment annehmen; d. h. wenn wir das Verhältnis der zurückgelegten Strecke während der (sagen wir) nächsten Stunde zur Zeit (also $\frac{1}{24}$ des Tages), die für deren Durchlaufung verwendet wurde, berechnen. Ist diese Strecke 20 Meilen, so erhalten wir $20 : \frac{1}{24}$, oder 480 Meilen täglich, als Durchschnitts-

geschwindigkeit *während dieser Stunde.* Für die zweite Annäherung nehmen wir, statt einer Stunde, eine Minute, u. s. f.

Das Verhältnis der zurückgelegten Strecke zur Zeit wird der tatsächlichen Geschwindigkeit immer näher. Obwohl sich die Zeit und die Strecke der Null in der Grenze nähern, ist es doch nicht im mindesten mit deren *Verhältnis* der Fall. Die Grenze, der sich dies *Verhältnis* nähert, oder das *Endverhältnis*, der durchlaufenen Strecke zur verbrauchten Zeit, wenn beide letzteren Größen verschwinden, ist nämlich die genaue Geschwindigkeit *in dem gegebenen Zeitpunkte.*

3. Wollen wir dieses Verfahren der Geschwindigkeitsberechnung auf den Fall der Körper in einem Vakuum anwenden. Erfahrungsmäßig wissen wir, daß der beim Falle zurückgelegte Weg gleich ist dem mit 16 multiplizierten Quadrat der Fallzeit, d. h. $s = 16\,t^2$, wo s die vom Ruhepunkte durchlaufene (in Fuß gemessene) Strecke und t die Zeit des Fallens (in Sekunden) darstellt. Betrachten Sie den Körper in irgend einem gegebenen Moment, in dem die Zeit $= t$ und die Entfernung $= s$ ist. Nehmen Sie an, daß wir einen kleinen Zeitzuwachs Δt abwarten, während dessen die Entfernung des Körpers von seinem Ausgangspunkte, s, um einen kleinen Zuwachs Δs größer wird. Wenn die obige Formel für *alle* Punkte richtig ist, so gilt sie auch dann, wenn die Zeit $= t + \Delta t$ und die Entfernung $= s + \Delta s$ ist. Das heißt:

$$s + \Delta s = 16\,(t + \Delta t)^2.$$

Dies ergibt

$$s + \Delta s = 16\,t^2 + 32\,t \cdot \Delta t + 16\,(\Delta t)^2,$$

aber

$$s = 16\,t^2.$$

Subtrahieren wir dies, so erhalten wir:

$$\Delta s = 32\,t \cdot \Delta t + 16\,(\Delta t)^2,$$

woraus folgt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32\,t + 16\,\Delta t. \qquad (1)$$

Dies ist die *durchschnittliche* Geschwindigkeit während des kleinen Intervalls Δt.

Daher, wenn $\Delta t = \frac{1}{2}$ Sekunde und $t = 5$ Sekunden ist, so ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des Körpers während dieser halben Sekunde (d. h. wenn die ganze Sekunde in

5 Sekunden vom Ruhepunkt anfängt) gleich $32 \times 5 + 16 \times \frac{1}{2}$, oder 168 Fuß pro Sekunde. Nehmen wir, statt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{160}$ einer Sekunde, so erhalten wir: $32 \times 5 + 16 \times \frac{1}{160}$, oder 160,1 Fuß pro Sekunde.

Auf diese Weise erhalten wir, indem wir Δt immer kleiner und kleiner annehmen, die durchschnittliche Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ für einen immer kleiner und kleiner werdenden Zeitabschnitt, der unmittelbar auf den Schluß der fünften Sekunde folgt. Die *Grenze*, welcher sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nähert, wenn Δt der Null als Grenze zustrebt, wird die Geschwindigkeit im *Moment* der Vollendung der fünften Sekunde genannt. Deren genauer Wert ist 160, was aus der rechten Seite der Gleichung (1) zu ersehen ist; letztere nähert sich doch in der Grenze dem Werte: $32 \times 5 + 16 \times 0$, oder 160 (da $t = 5$ ist und Δt der Null in der Grenze zustrebt).

Im allgemeinen, um den Grenzwert beider Seiten der Gleichung (1) auszudrücken, wenn Δt der Null nahe kommt, schreiben wir

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = 32\, t. \tag{2}$$

4. Der Leser wird beobachten, daß mit abnehmendem Δt auch Δs sich der Null nähert, da doch ein Körper in Null Zeit keine Strecke durchlaufen kann. Man muß sich aber hüten, den Grenzwert von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ durch $\frac{0}{0}$ auszudrücken, da dieser letztere Ausdruck, augenscheinlich, ganz unbestimmt ist. Obwohl nun das Verhältnis des Grenzwertes von Δs zum Grenzwert von Δt unbestimmt ist, ist jedoch der *Grenzwert des Verhältnisses* von Δs zu Δt vollständig bestimmbar. Und ausschließlich mit diesem letzteren Begriff, d. h. der

$$\text{Grenze von } \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \text{oder} \quad \lim \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

wird der Leser hier zu tun haben.

Der Grenzwert des Verhältnisses der verschwindenden Größen Δs und Δt, oder $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$, wird die „*Ableitung*“ von s

nach t genannt, da aus $s = 16\,t^2$ die Größe $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = 32\,t$ *abgeleitet* wird.

In der Tat — wir können von irgend einem Gliede der letzteren dieser zwei Gleichungen als von der *Ableitung* eines beliebigen Gliedes der ersteren sprechen. Zum Beispiel, $32\,t$ ist die Ableitung von $16\,t^2$.

5. Es werden noch andere Namen und Bezeichnungen gebraucht. So pflegt man statt $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$ das kürzere Symbol $\frac{ds}{dt}$ anzuwenden. In diesem Ausdrucke werden ds und dt *Differentiale* von s resp. t genannt, genau so, wie Δs und Δt *Zuwächse* von s resp. t genannt werden. Sie sind aber keine Nullen. Sie sind endliche Größen, und doch haben sie individuell keinen bestimmten Wert. Wir können für eins derselben einen beliebigen Wert auswählen. Ist aber der Wert eines Differentials festgesetzt, so ist es auch mit dem anderen der Fall, da beide im Verhältnis $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ergeben müssen. Wir können also die Differentiale ds und dt als *beliebige zwei Größen, die sich zueinander wie der Grenzwert des Verhältnisses von Δs und Δt verhalten, definieren.*

Andere Namen für $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$ oder $\frac{ds}{dt}$ sind, außer Ableitung, noch: „Differentialquotient" und „Differentialkoeffizient".

6. In dem oben betrachteten speziellen Falle ist der Differentialquotient eine Geschwindigkeit und kann mit v bezeichnet werden. Die Gleichung (2) nimmt[1]) also die Gestalt: $v = 32\,t$ an.

Nun kann die Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkte definiert werden als *das Grenzverhältnis der unmittelbar nach Passieren desselben zurückgelegten Strecke zur Zeit, die zum Durchlaufen dieser Strecke verbraucht wird, wenn die Strecke und die Zeit sich der Null, als Grenze, nähern.*

---

1) Wird die Strecke nicht in Fuß, sondern in Zentimetern gemessen, so haben wir $v \doteq 980\,t$ und im allgemeinen $v = gt$, wo g eine Konstante ist, deren numerischer Wert von den Einheiten abhängt, die zum Messen der Entfernung und der Zeit gewählt werden.

7. Beispiele.

1. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Körpers, der 10 Sekunden gefallen ist? 100 Sekunden? $1\frac{1}{2}$ Sekunden?
2. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Körpers, der 16 Fuß gefallen ist?

   Fingerzeig. Finden Sie zuerst, wieviel Sekunden er gefallen ist, indem Sie $s = 16\,t^2$ anwenden.
3. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Körpers, der 64 Fuß gefallen ist? 4 Fuß? 1 Fuß? 2 Fuß?
4. Bekanntlich unterliegt ein Körper, der nicht vom Ruhepunkt, sondern mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5 Fuß pro Sekunde fällt, dem Gesetze

   $$s = 16\,t^2 + 5\,t; \qquad (1)$$

   wie groß wird dessen Geschwindigkeit am Ende einer gewissen Zeit t?

   Fingerzeig. Mag t einen Zuwachs Δt bekommen, der das Zunehmen des s um Δs verursacht, so daß

   $$s + \Delta s = 16\,(t + \Delta t)^2 + 5\,(t + \Delta t). \qquad (2)$$

   Subtrahieren Sie (1) von (2), dividieren durch Δt und dann lassen Sie Δt und Δs gleich Null werden.

   $$\text{Antwort: } \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = 32\,t + 5.$$
5. Wie groß wird die Geschwindigkeit am Ende der 10ten Sekunde? Am Ende von 69 Fuß?
6. Bekanntlich unterliegt ein mit der Anfangsgeschwindigkeit u fallender Körper dem Gesetze: $s = \frac{1}{2} g t^2 + u t$; wie groß wird seine Geschwindigkeit am Ende der Zeit t sein? Wenn $t = 3$?

8. Wenn eine Größe von einer anderen *abhängig* ist, so wird erstere eine *Funktion* der letzteren genannt. Eine Änderung in der zweiten wird im allgemeinen von einer Änderung in der ersten *begleitet*. Häufig ist es unentbehrlich, den Raum oder die Grenzen näher anzugeben, innerhalb deren das Funktionalverhältnis besteht.

So ist die Strecke, die von einem Körper beim Fallen vom Ruhepunkte durchlaufen wird, eine Funktion der Zeit des Fallens, da die Entfernung des Körpers von der Dauer seines Fallens abhängt; die Nachfrage nach einem Artikel ist eine Funktion seines Preises, da mit der Preisänderung sich auch die Nachfrage ändert; wenn $y = x^2$, so ist y eine Funktion von x, weil eine Änderung in dem Werte von x auch eine Änderung im Werte von y hervorruft.

9. Wenn eine Größe eine Funktion von einer anderen Größe ist, so wird die letztere die *unabhängige Veränderliche* und die erstere die *abhängige Veränderliche* genannt.

Die Unterscheidung zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen macht man nur der Ausdrucksbequemlichkeit halber. Beide können untereinander vertauscht werden.

Also, da sich die Entfernung eines fallenden Körpers vom Anfangspunkte ändert, findet auch eine Änderung in der verbrauchten Zeit statt. Daher sagen wir, daß die „Zeit des Fallens" eine Funktion der „Entfernung" ist. Ähnlich kann auch der Preis als Funktion der Nachfrage angesehen werden. Ferner kann $y = x^2$ auch in der Form $x = \sqrt{y}$ geschrieben werden, wobei x eine Funktion von y gemacht wird. Der Begriff einer funktionalen Abhängigkeit ist also gänzlich vom Begriffe der *kausalen* Abhängigkeit verschieden. Die funktionale Abhängigkeit ist eine *gegenseitige*.

In dem Beispiel der fallenden Körper war s eine Funktion von t, und, was wir ausgeführt haben, — war eben die Bildung des Differentialquotienten oder der Ableitung dieser Funktion. Die Ableitung war in diesem Falle eine Geschwindigkeit. Im allgemeinen wird das Verfahren der Bildung des Differentialquotienten jeder gegebenen Funktion Differentiation genannt, und ist der Hauptinhalt der Differentialrechnung, — eines der zwei Zweige, in welche die Infinitesimalrechnung eingeteilt ist. Die Differentialrechnung wird uns in den fünf ersten Kapiteln dieses Buches beschäftigen.

10. Eine zweite wichtige Anwendung findet die Idee des Differentialquotienten einer Funktion in bezug auf die Bestimmung der *Tangentialrichtung* einer Kurve in deren beliebigem Punkte. Die Infinitesimalrechnung gestattet uns, einen möglichst allgemeinen Begriff der Tangente einer Kurve zu bilden. Der Leser wolle beobachten, daß die gewöhnliche Definition einer Kreistangente weder für jede beliebige, noch für alle Kurven gültig ist. Eine Gerade kann mit einer Kurve nur einen Punkt gemeinsam haben und doch dieselbe schneiden, ohne Tangente zu sein.

11. Es sei RS eine Kurve, deren Gleichung lautet

$$y = 1 + 5x - x^2. \qquad (1)$$

Das bedeutet, daß für *jeden* Punkt P der Kurve sich die „Ordinate" y (oder der Abstand PA dieses Punktes von der horizontalen Achse) zur „Abszisse" x (oder dem Abstande OA

von der vertikalen Achse) in der in (1) ausgedrückten Weise verhält. PA ist eine Funktion von OA; d. h. die Höhe PA jedes Punktes P der Kurve hängt von ihrer Entfernung OA von der vertikalen Achse ab.

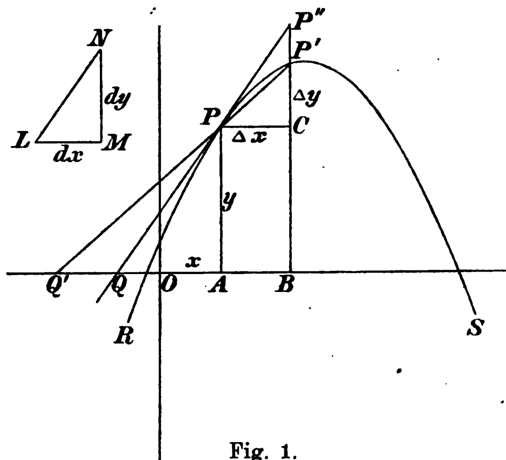


Fig. 1.

Welche Richtung hat die Kurve im Punkte P? Die Richtung vom Punkte P zu einem anderen Punkte P' wird durch die Richtung der Sekante $Q'PP'$ gegeben. Der Punkt P' hat die Abszisse $x + \Delta x$ und die Ordinate $y + \Delta y$. Da die Beziehung (1) für alle Punkte der Kurve richtig ist, so gilt sie auch für P'. Daher

$$y + \Delta y = 1 + 5(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2$$

oder

$$y + \Delta y = 1 + 5x + 5\Delta x - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2.$$

Wenn wir $y = 1 + 5x - x^2$ subtrahieren, erhalten wir

$$\Delta y = 5\Delta x - 2x\Delta x - (\Delta x)^2,$$

woraus folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5 - 2x - \Delta x.$$

Hier wollen wir einen Augenblick innehalten, um zu sehen, was dieses Ergebnis bedeutet. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder $\frac{P'C}{PC}$ ist die „Neigung" der Geraden $Q'PP'$. Es bedeutet, daß es das Maß ist, in welchem ein sich von Q' gegen P bewegender Punkt im Verhältnis zu seinem horizontalen Vorschreiten ansteigt. Die beschriebene Größe ist derselben Art, wie die „Neigung" eines bergauf gehenden Weges, welcher „auf eine (horizontale) Meile eine

gegebene Anzahl Fuß ansteigt". Ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{10}$, so steigt $Q'PP'$ einen Fuß auf je zehn horizontale an. Die „Neigung" einer Linie gibt ihre Richtung an.

Die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5 - 2x - \Delta x$ bedeutet, daß die „Neigung" der Sekante $Q'PP'$ in der Weise zu ermitteln ist, daß man 5 nimmt und davon zuerst die doppelte Zahl der Einheiten in OA und dann die Zahl der Einheiten in AB abzieht. Zum Beispiel, ist $OA = 2$ und $AB = \frac{1}{2}$, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5 - 2 \times 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

mit anderen Worten, neigt die Sekante 1 Fuß auf je zwei abwärts.

12. Aber wir haben noch nicht die Tangente in P erhalten. Mag der Punkt P' der Kurve entlang dem Punkte P allmählich zugeschoben werden, bis er endlich mit P zusammenfällt. Die Sekante $Q'P'$ wird ihre Richtung nach und nach ändern und sich der Grenzlage QP nähern. Diese *Grenzlage* nennen wir Tangente. Ihre Neigung ist

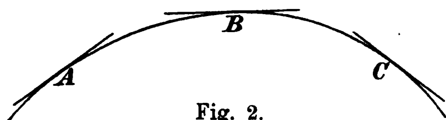


Fig. 2.
A positive Neigung; B Neigung = Null; C negative Neigung.

$$\frac{dy}{dx} = 5 - 2x.$$

Auf diese Weise, wenn x (d. h. OA) $= 2$ ist, so ist $\frac{dy}{dx} = 1$. Das heißt, QP hat die Neigung 45°. Ist $x = 4$, so ist $\frac{dy}{dx} = -3$; d. h. die Kurve *fällt* und steigt nicht.

Beispiele.

1. Wie groß ist die Neigung der Tangente der obigen Kurve im Punkte, dessen Abszisse $= 1$, 0, $2\frac{1}{2}$ ist? Was bedeutet dies? 6? -1?
2. Leiten Sie die Formel für die Neigung der Tangente der Kurve $y = 1 + x + x^2$ ab.

13. Um eine Tangente in P zu konstruieren, haben wir nur eine Gerade mit der gehörigen Neigung durch P zu ziehen. Auf diese Weise, wenn wir eine Tangente im Punkte mit der Abszisse 1 wünschen, so finden wir mit Hilfe der obigen Formel, daß deren Neigung = 3 ist. Wir legen also eine horizontale Strecke LM (Fig. 1) von beliebiger Länge, dx, und ziehen am

Endpunkte derselben die Scheitellinie MN von dreimal so großer Länge, oder dy. Wir ziehen nun LN; dieselbe wird die gewünschte Richtung haben. Alsdann legen wir durch P eine parallele Gerade zu LN. Dies wird die Tangente sein.

Wir können auch PC dx und $P''C$ dy nennen, weil dx und dy sind, kraft § 5, einfach zwei beliebige Größen, die sich zueinander verhalten, wie der Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn Δx sich in der Grenze der Null nähert.

Das Problem der Tangentenkonstruktion und der Berechnung deren Neigung war eine der Hauptaufgaben, die zur Erfindung der Infinitesimalrechnung Anlaß gegeben haben.

14. Es ist augenscheinlich, daß wir an P ebenso von links, wie von rechts her herankommen könnten. Wir würden trotzdem dieselbe Grenzlage erreichen, es sei denn, daß die Kurve im Punkte P einen Winkel bildete, wie es in Fig. 3 der Fall ist. In diesem Beispiel fallen die progressive (PK) und regressive (HP) Tangenten nicht zusammen. Solche sonderbare (singuläre) Punkte sind in diesem kleinen Werkchen nicht berücksichtigt worden. Alle Funktionen haben die Eigenschaft, daß für die Werte der unabhängigen Veränderlichen, die hier erörtert werden, die progressiven und regressiven Ableitungen identisch sind. Alle erörterten Kurven sind „glatt", d. h. sie haben keine Winkel oder plötzliche Richtungsänderungen. In vielen Anwendungen der Infinitesimalrechnung, wie z. B. auf statistische oder ökonomische Diagramme, ist es dienlich, zuerst die zu behandelnden Kurven auszugleichen. Wenn wir aus einem Bevölkerungsschema das Steigerungsverhältnis ermitteln wollen, legen wir die Tangente nicht zum Bild der *tatsächlichen* Figuren, sondern zur *ausgeglichenen* Kurve, die sich dem Schema so gut wie möglich anschmiegt.

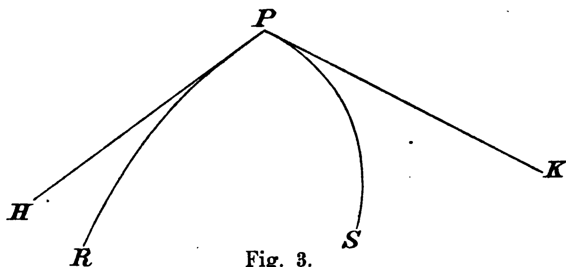


Fig. 3.

Der Leser wird sich in jedem einzelnen Falle mit der Festsetzung begnügen können, daß die progressiven und regressiven Ableitungen identisch sind.

So, für $s = 16\,t^2$ des Abschnitts 3, mag t eine *Abnahme* $\Delta' t$ erfahren, die bei s die Abnahme $\Delta' s$ hervorruft. Dann wird

$$s - \Delta' s = 16\,(t - \Delta' t)^2.$$

Nach Auflösung der Klammern, Subtraktion und Division, wie oben, bekommen wir:

$$\frac{\Delta' s}{\Delta' t} = 32\,t - 16\,\Delta' t,$$

was in der Grenze

$$\frac{d's}{d't} = 32,$$

wie früher, ergibt.

In der Tat, wir setzen im allgemeinen voraus, daß es für einen Körper physisch unmöglich ist, seine Geschwindigkeit *per saltum* (sprungweise) zu ändern. Daher ist die in Abschnitt 6 gegebene Definition der Geschwindigkeit der folgenden alternativen Definition äquivalent: das Grenzverhältnis der unmittelbar *vor* Erreichung des Punktes durchlaufenen Strecke zur verwendeten Zeit, wenn die Strecke und die Zeit der Null in der Grenze zustreben.

Von nun an wollen wir nur solche Funktionen behandeln, deren Ableitungen stetig (kontinuierlich) und die selbst innerhalb der betrachteten Grenzen stetig sind, d. h. die beim Übergang von einem Werte zum anderen alle dazwischenliegenden Werte ununterbrochen annehmen.

15. Wir haben gesehen, daß der Begriff eines Grenzverhältnisses in den Lehren über die Geschwindigkeit in der Mechanik und über die Tangentialneigung in der Geometrie Aufklärung bringt. Er ist auch auf vieles andere, sowohl in diesen beiden Wissenschaften, wie auch in allen mathematischen Disziplinen anwendbar. Moment, Beschleunigung, Kraft, Pferdekraft, Dichte, Krümmung, Grenznutzen, Grenzkosten, Nachfrageelastizität, Geburtenhäufigkeit, „Sterblichkeitsintensität“ sind alles Beispiele dafür.

Aber der Begriff des Grenzverhältnisses, oder der Ableitung einer Funktion ist von keiner speziellen Anwendung abhängig. Er ist ein rein abstrakter Zahlenbegriff.

16. Es mögen zwei Veränderliche x und y der Gleichung

$$y = x^n$$

genügen, wo n eine konstante und positive ganze Zahl ist. Wir können den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ für jeden einzelnen Wert von x folgendermaßen erhalten. Mag x einen Zuwachs Δx bekommen, der einen mit Δy bezeichneten Zuwachs bei y hervorruft. Alsdann ist, kraft des binomischen Lehrsatzes,

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$
$$= x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$
$$= x^n + n x^{n-1} \Delta x + \Delta x^2 (\cdots).$$

Subtrahieren wir

$$y = x^n,$$

so erhalten wir $\Delta y = n x^{n-1} \Delta x + (\Delta x)^2 (\cdots)$.

Daraus ergibt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \Delta x (\cdots),$$

wo der Klammerausdruck eine endliche Größe ist und auch endlich bleibt, nachdem Δx Null wird. Deshalb, wird $\Delta x = 0$, so wird auch der Ausdruck $\Delta x (\cdots) = 0$, und die Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}.$$

17. Dies ist die erste und die wichtigste spezifische Formel, die wir für die Ableitung einer Funktion ermittelt haben. Sie drückt aus, daß, um eine Ableitung von x^n, eine Potenz von x, zu erhalten, wir nur den Exponenten um Eins zu verringern und den alten Exponenten zum Koeffizienten zu machen haben.

So ist die Ableitung von x^3 $3x^2$. Wenn x durch den Wert 2 durchgeht, wird $3x^2 = 12$; d. h. y, oder x^3, nimmt 12 mal schneller zu, als x. $\frac{dy}{dx}$ ist das Verhältnis, in dem y zunimmt, verglichen mit dem Verhältnis, in dem wir x wachsen lassen. Bedeutet y die Entfernung eines sich bewegenden Körpers vom Ausgangspunkte und x die Dauer der Bewegung, so drückt $\frac{dy}{dx}$, oder $3x^2$, die *Geschwindigkeit* aus. Sind dagegen x und y „Koordinaten“ (d. h. „Abszisse“ und „Ordinate“) einer Kurve, deren Gleichung ist $y = x^3$, so ist $3x^2$ deren *Neigung* im Punkte mit der Abszisse x.

Obwohl logisch nicht notwendig, ist es doch praktisch nützlich den Differentialquotienten als mögliche *Geschwindigkeit* oder mögliche Neigung darzustellen. Von den zwei unabhängigen Erfindern der Infinitesimalrechnung scheint Newton die erste Deutung und Leibniz die zweite gebraucht zu haben. Newtons Terminus für den Differentialquotienten war „Fluxion“.

Beispiele.

1. Man finde die Ableitungen von x^{12}, x^5, x^2, x. Was bedeutet die letzte Antwort?
2. Um wieviel mal stärker nimmt y zu, als x, wenn $y=x^4$ und $x=2$ ist?
3. Wie stark nimmt x^6 zu im Vergleich mit x, wenn $x=-1$? Was bedeutet die negative Antwort?

18. Das in diesem Kapitel zur Berechnung der Ableitung einer Funktion gebrauchte Verfahren wird „die allgemeine Methode der Differentiation" genannt. Es besteht: 1) in der Vergrößerung der unabhängigen Veränderlichen um einen kleinen Zuwachs, wodurch ein anderer kleiner Zuwachs[1]) bei der abhängigen Veränderlichen, oder Funktion, hervorgerufen wird; 2) in der Aufstellung des Verhältnisses zwischen den zwei Veränderlichen zuerst ohne und dann mit diesen Zunahmen und im Subtrahieren des ersten vom zweiten; 3) im Dividieren durch den Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen; 4) in einem Grenzübergang, wodurch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{dy}{dx}$ übergeht.

Dieses Verfahren dürfte vom Leser vollkommen beherrscht werden, da es den Keim der ganzen Infinitesimalrechnung bildet.

Man wird bemerken, daß die Reihenfolge der Schritte 3) und 4) nicht umgekehrt werden kann, ohne zum trivialen Ergebnis $0=0$ zu führen.

19. Nichtsdestoweniger können wir das Resultat des Schrittes 4), ohne Änderungen zu verursachen, aus der Form von 2) *antizipieren*. So gibt die Gleichung

$$y=5+2x+3x^2+5x^3$$

beim Schritte 2):

$$\begin{aligned}\Delta y &= 2\Delta x+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+15x^2\Delta x+15x(\Delta x)^2+5(\Delta x)^3\\ &=(2+6x+15x^2)\Delta x+(3+15x)(\Delta x)^2+5(\Delta x)^3.\end{aligned}$$

Es kann leicht vorausgesehen werden, daß der Schritt 3) (d. h. das Dividieren durch Δx) das erste Δx beseitigen und die Exponenten von Δx um Eins vermindern wird, und daß daher nach Vollziehung des Schrittes 4) (d. h. der Verwandlung

---

1) Abnahmen können immer als negative Zunahmen angesehen werden.

des Δx in Null) alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, verschwinden werden, und nur $2 + 6x + 15x^2$ als Ableitung übrig bleiben wird. Jetzt ist es klar, daß dieses Ergebnis vorweggenommen werden könnte, indem man alle Glieder, die *höhere als I. Potenzen von Δx enthielten, einfach vernachlässigen* und den Koeffizienten der ersten Potenz als die gewünschte Ableitung annehmen konnte.

Obwohl dieses Verfahren der Vernachlässigung gewisser Glieder beim Schritte 2) nur eine Vorwegnahme dessen ist, was notwendig beim Schritte 4) stattfinden muß, kann es jedoch nachgewiesen werden, daß es *in situ* ganz natürlich ist. Ist Δx kleiner als Eins, so wird $(\Delta x)^2$ kleiner als Δx sein, $(\Delta x)^3$ kleiner als $(\Delta x)^2$ u.s.f. Indem man Δx immer kleiner macht, können die höheren Potenzen $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ usw. nicht nur absolut, sondern auch *im Vergleich mit Δx* beliebig klein gemacht werden. Da die höheren Potenzen von Δx auf diese Weise in bezug auf Δx vernachlässigt werden dürfen, so müssen auch die Glieder, in denen jene Potenzen als Faktoren auftreten, zu vernachlässigende Größen werden (offenbar mit der Voraussetzung, daß der *andere* Faktor, der jedes solche Glied bildet, sich der Unendlichkeit, als Grenze, nicht nähert).

Ist also $\Delta x = \frac{1}{100}$, so ist $(\Delta x)^2 = \frac{1}{10000}$ und $(\Delta x)^3$ nur $= \frac{1}{1000000}$. Daher können wir die Glieder der Gleichung

$$\Delta y = (2 + 6x + 15x^2)\Delta x + (3 + 15x)(\Delta x)^2 + 5(\Delta x)^3,$$

außer dem ersten, ***beliebig klein im Vergleich mit dem ersten*** machen, indem wir Δx *genügend* klein machen, einerlei was für Wert x annehmen mag, so lange bis es endlich ist, da dabei auch die Klammern endlich bleiben. Ist z. B. $x = 2$, so haben wir $\Delta y = 74\Delta x + 33(\Delta x)^2 + 5(\Delta x)^3$. Daher bei

$$\Delta x = 0{,}01$$

wird

$$\Delta y = 0{,}74 + 0{,}0033 + 0{,}000005.$$

Bei

$$\Delta x = 0{,}001$$

wird

$$\Delta y = 0{,}074 + 0{,}000033 + 0{,}000000005.$$

Bei

$$\Delta x = 0{,}000001$$

wird

$$\Delta y = 0{,}000074 + 0{,}000000000033 + 0{,}000000000000000005,$$

und je kleiner wir Δx machen, desto größer wird die Möglichkeit, die die $(\Delta x)^2$ und $(\Delta x)^3$ enthaltenden Glieder zu vernachlässigen, bis sie endlich beim Grenzübergang nicht bloß „für praktische Zwecke", sondern *absolut* zu vernachlässigende Größen werden.

Die antizipatorische Vernachlässigung der Glieder, die höhere, als die I[te] Potenzen von Δx enthalten, spart oft sehr viel Arbeit.

Beispiele.

1. Man berechne $\frac{dy}{dx}$, wenn $y = x^5$.
2. Man berechne $\frac{dy}{dx}$, wenn $y = x^7 + 8x^6 + 4$. 7x + 48x⁵
3. Man berechne $\frac{dy}{dx}$, wenn $y = 10x^{100}$. 1000 x⁹⁹
4. Man berechne $\frac{dy}{dx}$, wenn $y = ax^m + bx^n$ am x m-1 + bn x n-1

(wo m und n positive ganze Zahlen sind).

Kapitel II.

Allgemeine Sätze über die Differentiation.

20. Wenn wir

$$y = 2x$$

mit Hilfe der allgemeinen Methode differentiieren, erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = 2. \tag{1}$$

Befreien wir diese Gleichung von Brüchen, so haben wir

$$dy = 2\,dx. \tag{2}$$

Diese letzte Gleichung ist lediglich eine andere Form der ersten und ist für manche Zwecke dienlicher.

Demgemäß ist

$$dy = 6\,x\,dx$$

eine Transformation von:

$$\frac{dy}{dx} = 6\,x,$$

was seinerseits mit:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6\,x$$

gleichbedeutend ist. $6x$ ist ein Differentialquotient und $6x\,dx$ ist ein Differential.

Beispiele.

1. Was ist das Differential von x^5?
2. Die Differentialquotienten von x^7, x^{10}, x^4?

21. Um lediglich die Tatsache auszudrücken, daß y eine Funktion von x ist, ohne die *Art* der Funktion zu präzisieren, pflegt man die Buchstaben F, f, φ, ψ (und selten andere) mit x in Klammern zu gebrauchen. Sie können einfach als Abkürzungen des Wortes „Funktion" angesehen werden. So wird: „y = Funktion von x" durch

$$y = F(x)$$

abgekürzt.

Es muß bemerkt werden, daß die Buchstaben F, f, φ, ψ usw. keine Größen, wie x und y, sondern, gleich Δ und d, Operationen mit Größen darstellen.

22. Der allgemeine Ausdruck für eine Funktion, wie z. B. $\varphi(x)$, wird oft der Kürze halber zur Bezeichnung einer *speziellen* Funktion gebraucht. So, wenn wir die Gleichung

$$y = \frac{1 + x - 6x^5 + \dfrac{1}{a x^5}}{\dfrac{5x}{1 + x^2} + \dfrac{2 - x^3}{4x^2}}.$$

haben, können wir sie durch $y = \varphi(x)$ abkürzen, indem wir die schwerfällige rechte Seite mit $\varphi(x)$ bezeichnen.

Anderseits, wenn wir im Besitze einer bestimmten Kurve, wie z. B. eines statistischen Diagramms, sind, dessen Koordinaten wir x und y nennen, so dürfen wir

$$y = f(x)$$

gebrauchen, um die Tatsache auszudrücken, daß y sich in der bestimmten, durch die Kurve gedeuteten Weise zu x verhält.

23. Der Differentialquotient, oder die Ableitung einer Funktion von x, ist selbst eine Funktion von x.

Den Differentialquotienten von

$$F(x)$$

bezeichnen wir:

$$F'(x).$$

So, stellt z. B.

$$\varphi(x) \quad x^6$$

dar, dann bedeutet

$$\varphi'(x) \quad 6\,x^5.$$

Das Differential von $F(x)$ wird daher bezeichnet:

$$F'(x)\,dx.$$

24. Eine andere Bezeichnungsweise des Differentialquotienten von

$$F(x)$$

stellt denselben in Zusammenhang mit der allgemeinen Methode der Differentiation. Wenn wir nämlich x um Δx wachsen lassen, so wird aus $F(x)$

$$F(x + \Delta x).$$

Die Differenz dieses Wertes und des ursprünglichen ist

$$F(x + \Delta x) - F(x).$$

Das Verhältnis dieser Differenz zur Zunahme Δx der unabhängigen Veränderlichen x ist:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Der Grenzwert davon, d. h.

$$\lim \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

ist der Differentialquotient von $F(x)$, oder $F'(x)$.

Das obige Verfahren ist mit der allgemeinen Methode der Differentiation identisch, obwohl wir es ausgedrückt haben, ohne y zu gebrauchen. Wir könnten auch folgendermaßen verfahren:

Setzen wir $F(x)$ gleich y, so daß

$$y = F(x).$$

Subtrahieren wir dies von

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x)$$

und dividieren durch Δx, dann erhalten wir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

oder in der Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

25. Noch mit einer Bezeichnungsweise haben wir uns vertraut zu machen. Es ist vielmehr eine neue Anwendung einer alten. Statt $\frac{dy}{dx}$ zu schreiben, können wir nämlich y in diesem Ausdrucke durch $F(x)$ ersetzen, so daß er die Form

$$\frac{d[F(x)]}{dx}$$

annimmt.

Der Leser wird jetzt gut tun, sich von der Vorstellung von y, als von einem unentbehrlichen Elemente der Analysis, zu befreien. Es ist nur als eine weitere Abkürzung von $F(x)$ aufzufassen. $F(x)$, und nicht y, soll vor allen Dingen als Funktion von (x) angesehen werden. Daher brauchen wir, statt die Strecke mit s zu bezeichnen und $s = 16\,t^2$ zu setzen, nur zu sagen, daß, wenn t Zeit bedeutet, die Funktion von t, $16\,t^2$, die Strecke ausdrückt.

Desgleichen, ist x die Abszisse einer Kurve, so bedeutet $F(x)$, und nicht y, deren Ordinate.

Es ist also

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2\,x,$$

oder

$$d(x^2) = 2\,x \cdot dx.$$

Beispiele.

$$\frac{d(x^3)}{dx} = ? \qquad d(x^4) = ?$$

Auf diese Weise haben wir fünf Bezeichnungsarten des Differentialquotienten von y, oder $F(x)$, u. zw.:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d[F(x)]}{dx}, \quad F'(x), \quad \lim \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

26. Ist eine Funktion von x die Summe mehrerer Funktionen von x, d. h. ist:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots,$$

und ist diese Gleichung für alle Werte von x richtig, so gilt sie auch, wenn x auf $x + \Delta x$ anwächst, so daß nunmehr

$$F(x+\Delta x) = f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x) + \cdots.$$

Indem wir die obige Gleichung von der unteren subtrahieren und durch Δx dividieren, erhalten wir

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x} + \cdots$$

Lassen wir nun $\varDelta x$ bis auf Null in der Grenze abnehmen, dann erhalten wir als Grenzwerte der Terme der obigen Gleichung

$$\lim \frac{F(x+\varDelta x)-F(x)}{\varDelta x} = \lim \frac{f_1(x+\varDelta x)-f_1(x)}{\varDelta x} + \cdots$$

oder

$$F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots.$$

Oder in Worten: *Der Differentialquotient einer Summe mehrerer Funktionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten jener Funktionen.* Dieselbe Beweisführung dient zur Begründung eines entsprechenden Satzes für die *Differenz* von Funktionen.

So ist der Differentialquotient von $x^2 + x^3$

$$2x + 3x^2.$$

Manchmal wird dieser Satz in der abgekürzten Form

$$F'(x)\,dx = f_1'(x)\,dx + f_2'(x)\,dx + \cdots,$$

oder auch

$$F'(x)\,dx = [f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots]\,dx$$

angewandt.

Beispiele. Man berechne den Differentialquotienten von:

1. $x^6 + x^2 - x^4$. 2. $x^7 - x^2 + x$. 3. $-x^2 + x^{10}$.

27. Ist eine Funktion von x die Summe einer anderen Funktion von x und einer konstanten Größe, d. h.

$$F(x) = f(x) + K, \tag{1}$$

wo K eine Konstante ist, so gilt die Gleichung

$$F'(x) = f'(x); \tag{2}$$

es ergibt sich also dasselbe, als ob K in (1) gar nicht vorhanden wäre. Der Beweis von (2) ist einfach. Wächst nämlich x auf $x + \varDelta x$ an, so nimmt (1) die Gestalt

$$F(x+\varDelta x) = f(x+\varDelta x) + K \qquad (1)'$$

an. Bei Subtraktion der Gleichung (1) von (1)' hebt sich K weg, und nach Division durch $\varDelta x$ erhalten wir

$$\frac{F(x+\varDelta x)-F(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x},$$

was in der Grenze die Relation (2) ergibt. Dasselbe Resultat könnte erreicht werden, wenn K in (1), statt des positiven, das negative Vorzeichen gehabt hätte.

Daher, um die Ableitung einer Summe (oder Differenz) einer Reihe von Gliedern, von denen einige konstant sind, zu erhalten, nehmen wir einfach die Summe (resp. Differenz) der Ableitungen aller Glieder, die Funktionen von x sind, ohne die Konstanten zu berücksichtigen.

So ist z. B. bei $y = x^3 + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Ferner ist die Ableitung von $x^5 - x^4 + x + a - b - 8$ gleich:

$$5x^4 - 4x^3 + 1.$$

Das vorhergehende Ergebnis wird manchmal in der Form ausgedrückt, daß man alle, sogar konstante Glieder als Funktionen von x auffaßt, indem man nämlich sagt, die Ableitung einer Konstante sei gleich Null.

Beispiele. Man berechne die Differentialquotienten von:
1. $x^2 + 2$. 2. $x^2 + 3 + x^4$. 3. $x^3 + x^5 + 19$.
4. Man beweise letzteres mit Hilfe der allgemeinen Differentiationsmethode.

28. Ist eine Funktion von x das Produkt einer Konstante und einer anderen Funktion von x, d. h.

$$F(x) = K \cdot \varphi(x), \tag{1}$$

so ist

$$F'(x) = K \cdot \varphi'(x).$$

Oder in Worten: *Die Ableitung des Produktes einer Konstante und einer Funktion ist gleich der Konstante, multipliziert mit der Ableitung der Funktion.*

Beweis. — Wächst x auf $x + \Delta x$ an, so nimmt (1) die Gestalt

$$F(x + \Delta x) = K\varphi(x + \Delta x) \tag{1'}$$

an. Subtrahieren wir (1) von (1)′ und dividieren durch Δx, so erhalten wir

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{K \cdot \varphi(x + \Delta x) - K\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$= K\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},$$

oder in der Grenze

$$F'(x) = K \cdot \varphi'(x).$$

Folgesatz. — Die Ableitung von mx^n ist m mal größer, als die Ableitung von x^n, wie sie im § 16 angegeben ist; sie ist also $= mnx^{n-1}$. Dieses Resultat wird so oft angewandt, daß es sorgfältig im Gedächtnis behalten werden soll. Ist $n = 1$, so ist die Ableitung einfach m. (Man beweise es unmittelbar mit Hilfe des § 18.)

Beispiele. Man differentiiere:

$$5x^8, \quad 2x^7, \quad 4x^{10}, \quad 3x, \quad \tfrac{1}{2}x^8,$$

$$\frac{x^6}{3}, \quad \frac{\sqrt{2}\,x^7}{5}, \quad x^8\left(1+\frac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{2}}\right).$$

29. Ist eine Funktion das Produkt von zwei Funktionen von x, d. h. $F(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$, so ist

$$F(x+\Delta x) = \varphi(x+\Delta x)\cdot\psi(x+\Delta x).$$

Nach Subtraktion und Division durch Δx haben wir

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x)\cdot\psi(x+\Delta x)-\varphi(x)\cdot\psi(x)}{\Delta x}.$$

Die rechte Seite darf folgendermaßen umgestaltet werden, ohne eine Wertänderung einzubüßen, indem man im Zähler $\varphi(x)\,\psi(x+\Delta x)$ addiert und subtrahiert:

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)\,\psi(x+\Delta x)-\varphi(x)\psi(x)-\varphi(x)\,\psi(x+\Delta x)+\varphi(x)\,\psi(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Vereinigen wir die Glieder mit gemeinsamen Faktoren, so erhalten wir

$$\frac{[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]\,\psi(x+\Delta x)+\varphi(x)\,[\psi(x+\Delta x)-\psi(x)]}{\Delta x},$$

oder

$$\frac{[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]}{\Delta x}\,\psi(x+\Delta x)+\frac{[\psi(x+\Delta x)-\psi(x)]}{\Delta x}\,\varphi(x).$$

Betrachten wir nun die einzelnen Terme der Reihe nach, so sehen wir, daß

der Grenzwert von $\dfrac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$ ist

" " " $\psi(x+\Delta x) = \psi(x)$ "

" " " $\dfrac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} = \psi'(x)$ "

" " " $\varphi(x) = \varphi(x)$ "

was uns für die rechte Seite der Gleichung

$$\varphi'(x)\,\psi(x) + \psi'(x)\,\varphi(x)$$

ergibt, während für die andere (linke) Seite der Gleichung

$$\lim \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

folgt. Setzen wir diese Grenzwerte einander gleich, so erhalten wir

$$F'(x) = \varphi'(x)\,\psi(x) + \psi'(x)\,\varphi(x)$$

und hiermit den Satz: *Die Ableitung eines Produktes von zwei Funktionen ist gleich der Summe der Produkte von den Ableitungen der beiden Funktionen einzeln genommen und mit der anderen Funktion multipliziert.*

Demgemäß ist

$$\frac{d\,[x^2\,(1+x^2)]}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx}(1+x^2) + \frac{d\,(1+x^2)}{dx}\,x^2$$
$$= 2\,x\,(1+x^2) + 2\,x \cdot x^2$$
$$= 2\,x\,(1+2\,x^2).$$

Beispiele. — 1. Man bilde die Ableitung von $(1+x^2)(1-x^2)$ zunächst auf Grund des § 29 und dann mit Hilfe von Multiplikation und Differentiation. $(3x^2 - 4x^3)(5 + x^5) + 5x^4(2 + x^3 - x^4)$

2. $(2+x^3-x^4)(5+x^5)$, $4\,(x^2+1)\,(x^3-2)$, $a\,(3\,x^2+4)\,(5\,x^3+6\,x^2+7\,x+8)$, $(a+b)\,(kx^m+hx^m+p)\,(qx^2+r)$.

3. Man beweise den § 28 mit Hilfe des § 29, wobei K als eine Form von $\psi(x)$ aufzufassen ist, deren Ableitung gleich Null ist (s. § 27, Schluß).

4. Man beweise den § 29 mit Hilfe anderer Bezeichnungen.

30. Folgesatz. Ist $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$, so dürfen wir $f_2(x) \cdot f_3(x)$ der Kürze halber gleich $\varphi(x)$ setzen, so daß

$$F(x) = f_1(x) \cdot \varphi(x),$$

woraus folgt

$$F'(x) = f_1'(x)\,\varphi(x) + \varphi'(x) \cdot f_1(x).$$

Ersetzen wir $\varphi(x)$ durch dessen Wert $f_2(x) \cdot f_3(x)$ und $\varphi'(x)$ durch

$$f_2'(x) \cdot f_3(x) + f_3'(x) \cdot f_2(x),$$

so erhalten wir

$$F'(x) = f_1'(x)\,[f_2(x)\,f_3(x)] + [f_2'(x)\,f_3(x) + f_3'(x)\,f_2(x)]\,f_1(x)$$
$$= f_1'(x)\,f_2(x)\,f_3(x) + f_2'(x)\,f_3(x)\,f_1(x) + f_3'(x)\,f_1(x)\,f_2(x).$$

Durch sukzessive Anwendung des § 29 kann dieser Satz auf Produkte von beliebig vielen Funktionen übertragen werden; er lautet dann folgendermaßen: Die Ableitung eines Produktes von beliebig vielen Funktionen ist

gleich der Summe der Produkte der Ableitungen jeder einzelnen Funktion, multipliziert mit allen übrigen Funktionen.

Beispiele. — Man bilde die Ableitung von:

$$(x^2+1)(x+1)(x-1), \quad x^3(x^2+2x+3)(2x^4-7)(4-x^5).$$

31. Ist $F(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ (und ist $\varphi(x)$ nicht Null), so ist

$$\frac{F(x+\varDelta x)-F(x)}{\varDelta x}=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x+\varDelta x)}-\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\varDelta x}$$

$$=\frac{\varphi(x)-\varphi(x+\varDelta x)}{\varDelta x\,\varphi(x)\,\varphi(x+\varDelta x)}$$

$$=\frac{-1}{\varphi(x)\,\varphi(x+\varDelta x)}\cdot\frac{\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)}{\varDelta x},$$

oder in der Grenze $F'(x)=\dfrac{-1}{[\varphi(x)]^2}\cdot\varphi'(x)=\dfrac{-\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}.$

Das heißt, die Ableitung des reziproken Wertes einer Funktion ist gleich der negativen Ableitung der Funktion, dividiert durch das Quadrat der Funktion selbst.

So ist der Differentialquotient von

$$\frac{1}{3x^2} \text{ gleich } \frac{\dfrac{-d(3x^2)}{dx}}{(3x^2)^2}, \text{ oder } \frac{-6x}{9x^4}=\frac{-2}{3x^3}.$$

32. Beispiele. — 1. Man bilde die Ableitung von:

$$\frac{1}{x^4},\quad \frac{1}{1+x^3},\quad \frac{1}{1+x+x^2}.$$

2. Man beweise mit Hilfe der Methode des § 29, daß aus

$$F(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

$$F'(x)=\frac{\varphi'\psi-\psi'\varphi}{(\psi)^2}$$

folgt, wo die (x) der Kürze halber weggelassen sind.

3. Man beweise denselben Satz mit Anwendung der Ergebnisse der §§ 29, 31, nachdem man $\dfrac{\varphi}{\psi}$ in der Form $\varphi\cdot\dfrac{1}{\psi}$ dargestellt hat.

33. Wir dürfen hier eine Anwendung des Ergebnisses des § 31 einfügen, um den Satz des § 16 zu verallgemeinern. Der Differentialquotient von x^n wurde dort nur mit der Beschränkung gebildet, daß n eine positive ganze Zahl ist. Aber ist n eine ganze negative Zahl, $-m$, so wird $x^n=\dfrac{1}{x^m}$; dessen Differentialquotient ist

$$\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}},$$

was in $-mx^{-m-1}$ oder nx^{n-1} übergeht.[1])

Also kann die in § 16 auferlegte Beschränkung, daß n positiv sein muß, beseitigt werden.

Beispiele: Man differentiiere:

$$x^{-2},\quad 3x^{-5},\quad \frac{1}{x^7},\quad \frac{1}{8x^3}.$$

34. Wollen wir einen Quotienten zweier Funktionen, wie z. B. $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, differentiieren, so können wir dies durch Vereinigung der Ergebnisse der §§ 29 und 31 erlangen, da der Quotient in der Gestalt $\varphi(x)\cdot\frac{1}{\psi(x)}$ geschrieben werden kann.

So wird der Differentialquotient von $\frac{1+x^2}{1-x^3}$ gebildet, indem man schreibt: $(1+x^2)\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot$ Bei Anwendung des Satzes über die Produkte erhalten wir

$$(1+x^2)\frac{d\left(\frac{1}{1-x^3}\right)}{dx}+\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\frac{d(1+x^2)}{dx},$$

was schon leicht vereinfacht werden kann.

Wenn der Leser es vorzieht, so kann er nur das Ergebnis des Beispiels 2, § 32 im Gedächtnis behalten und anwenden.

35. Ist z eine Funktion von y und y eine Funktion von x, so ruft eine Zunahme Δx des x einen Zuwachs Δy bei y hervor, welches seinerseits eine Zunahme Δz bei z verursacht. Offenbar ist[2])

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Daraus folgt in der Grenze

---

1) Es wird dabei vorausgesetzt, daß, wenn n eine negative Zahl ist, x nicht Null ist. Sonst würde die Null als Nenner auftreten, was stets unzulässig ist.

2) Es wird dabei vorausgesetzt, daß y in dem betrachteten Intervalle nicht unendlich viele Oszillationen ausführt. Im letzteren Falle würde notwendigerweise die Null als Nenner auftreten, was die Beweisführung entkräften würde.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Dies kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden: Ist

$$F(x) = \varphi(f(x)),$$

so gilt

$$F'(x) = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Es muß sorgfältig darauf acht gegeben werden, daß $\varphi'(f(x))$ die Ableitung von $\varphi(f(x))$ *nicht* nach x, sondern nach $f(x)$ bezeichnet. Es ist nämlich $\frac{dz}{dy}$ und nicht $\frac{dz}{dx}$, d. h. es ist $\frac{d\varphi(f(x))}{df(x)}$ und nicht $\frac{d\varphi(f(x))}{dx}$.

In Worten lautet der Satz folgendermaßen: Die Ableitung *nach* x einer Funktion von einer Funktion von x ist gleich der Ableitung der ersten Funktion *nach der zweiten*, multipliziert mit der Ableitung der zweiten Funktion *nach* x.

Daher, ist $y = (1 + x^2)^3$, so kann $\frac{dy}{dx}$ gebildet werden, indem man $(1 + x^2)$ mit w bezeichnet und darauf zuerst $\frac{dy}{dw}$ von $y = w^3$ und alsdann $\frac{dw}{dx}$ von $w = 1 + x^2$ bildet. Also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = 3\,w^2 \cdot 2\,x = 3\,(1 + x^2)^2 \cdot 2\,x.$$

Aber die Einführung von w ist ganz unnötig, und der Leser möge lernen, dasselbe, sowohl wie auch y, zu entbehren. Die gewünschte Ableitung stellt sich dann in der Gestalt:

$$\frac{d(1 + x^2)^3}{d(1 + x^2)} \cdot \frac{d(1 + x^2)}{dx} = 3\,(1 + x^2)^2 \cdot 2\,x$$

dar.

Bei Verwendung der Bezeichnung der Differentiale ist es sogar leichter dieses Verfahren im Gedächtnis zu behalten und anzuwenden. Das Differential von $\varphi(f(x))$ ist

$$d\varphi(f(x)), \quad \text{oder} \quad \varphi'(f(x))\,df(x), \quad \text{oder} \quad \varphi'(f(x)) \cdot f'(x)\,dx.$$

Das heißt, wir führen die Differentiation aus, indem wir zuerst „$f(x)$" als einen einzelnen Buchstaben behandeln, und unser Ergebnis enthält $df(x)$. Alsdann vollziehen wir die weitere Differentiation, die durch $df(x)$ angedeutet ist.

So ist z. B.

$$\begin{aligned} d(1 + x^2)^3 &= 3(1 + x^2)^2 d(1 + x^2) \\ &= 3(1 + x^2)^2 2x\,dx, \end{aligned}$$

wo „$(1 + x^2)$" zuerst ungeändert genommen wird, als ob es keine Zu-

sammensetzung von Symbolen, sondern ein einziges schwerfälliges Symbol wäre.

36. Beispiele.

1. Man differentiiere $4(2+x^3)^2$.
2. Man differentiiere $(7+x)^5$.
3. Man differentiiere $2(1+2x+x^2)^3$.
4. Man differentiiere $(3x^3-2)^{-4}$.
5. Man differentiiere $\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$.
6. Man differentiiere $\frac{3}{(2x^3+3x^2+4)^5}$.
7. Man differentiiere
$$a+b(1+x^2)^2+c(1+x^2)^3+k(1+x^2)^5.$$
8. Man differentiiere
$$\left(3(ax^2+bx+c)^3+\frac{5}{k(ax^2+bx+c)^2}\right)(h-m(ax^2+bx+c)^n).$$

37. Ist
$$F(x)=\varphi\{\psi[f(x)]\},$$
so können wir schreiben:
$$F'(x)=\varphi'[\xi(x)]\cdot\xi'(x),$$
indem wir $\psi[f(x)]=\xi(x)$ setzen und § 35 anwenden. Wenn wir alsdann für $\xi(x)$ dessen angesetzten Wert und für ξ' den in § 35 bestimmten Wert einsetzen, so erhalten wir
$$F'(x)=\varphi'\{\psi[f(x)]\cdot\psi'[f(x)]f'(x)\},$$
und so fort für eine beliebige Zahl von Funktionen. Gebrauchen wir statt der Differentialquotienten Differentiale, so haben wir
$$\begin{aligned} d\{\varphi_1(\varphi_2[\varphi_3(\cdots)])\} &= \varphi_1' d\varphi_2 \\ &= \varphi_1'\cdot\varphi_2' d\varphi_3 \\ &= \varphi_1'\cdot\varphi_2'\cdot\varphi_3' d\varphi_4 \\ &= \text{usw.} \end{aligned}$$

Beispiele.

1. Man bilde die Ableitung von
$$4\{2(1+x^2)^2+3(1+x^2)^3\}^2+5\{2(1+x^2)^2+3(1+x^2)^3\}^3.$$
2. Man differentiiere
$$\{a+[b+(c+hx^2)^3]^5\}^2.$$

38. Die Ergebnisse dieses Kapitels können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. $\frac{d[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots]}{dx}=f_1'(x)\pm f_2'(x)+\cdots.$

2. $\frac{d[\varphi(x)\cdot\psi(x)]}{dx} = \varphi(x)\psi'(x) + \psi(x)\varphi'(x).$

3. $\frac{d[K\cdot\varphi(x)]}{d(x)} = K\varphi'(x).$

4. $\frac{d\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]}{dx} = \frac{-\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}.$

5. $\frac{d[\varphi(f(x))]}{dx} = \varphi'[f(x)]f'(x).$

Kapitel III.

Differentiation der elementaren Funktionen.

39. Wir haben gelernt (§§ 16, 33), daß die Ableitung von $x^n = nx^{n-1}$ ist, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. x^n ist die elementare algebraische Funktion.

Jetzt haben wir die sogenannten „transzendenten" elementaren Funktionen zu differentiieren. Zu diesem Zweck kehren wir zur allgemeinen Differentationsmethode zurück. Wir wollen mit trigonometrischen Funktionen anfangen.

40. $$\frac{d(\sin x)}{dx} = \lim \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{\sin x\cdot\cos\Delta x + \cos x\cdot\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim\left\{\cos x\,\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} - \sin x\,\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}\right\}.$$

$\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$ wird aber in der Grenze $=1$ und $\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}$ wird $=0$, wenn sich Δx der Null nähert.

Dies wird mit Hilfe der Figur 4 bewiesen, wo arc AB, oder Δx, mit dem Einheitsradius OA beschrieben ist, so daß $BC = \sin\Delta x$, $CO = \cos\Delta x$ und $CA = 1 - \cos\Delta x$ ist.

$$\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \text{ ist daher } \frac{BC}{\text{arc } BA}$$

und

$$\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} = \frac{CA}{\text{arc } BA}.$$

Wird arc $BA = 0$, so werden auch CA und $BC = 0$. Der Beweis, daß

$\lim \frac{BC}{\text{arc } BA} = 1$ und $\lim \frac{CA}{\text{arc } BA} = 0$ sind, wird dem Leser mit folgenden Fingerzeigen überlassen:

1. $1 > \frac{BC}{\text{arc } BA} > \frac{BC}{DA} = \frac{CO}{AO}$, was sich der 1 in der Grenze nähert.

2. $\frac{CA}{BA} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{BC}{BA} = \frac{BC}{CE} \cdot \frac{BC}{BA}$, was sich der 0×1 nähert.

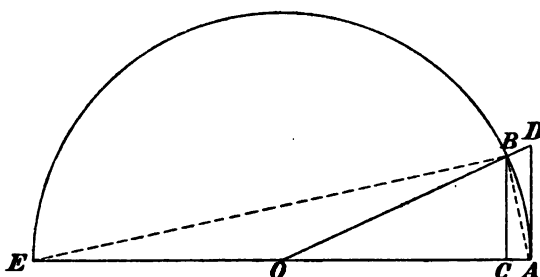


Fig. 4.

Daher $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \times 1 - \sin x \times 0 = \cos x$. In ähnlicher Weise können wir beweisen, daß

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

41. $$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ähnlich auch

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

42. $$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \text{u.s.f. laut § 31,}$$

und

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = \text{u.s.f.}$$

43. $$\frac{d(a^x)}{dx} = \lim \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

$$= \lim a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Jetzt sei $a^{\Delta x} - 1 = \delta$, so daß $a^{\Delta x} = 1 + \delta$ und

$$\Delta x \log a = \log (1 + \delta)$$

$$\Delta x = \frac{\log(1+\delta)}{\log a}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \lim a^x \frac{\delta}{\frac{\log(1+\delta)}{\log a}}$$

$$= \lim a^x \log a \frac{1}{\frac{\log(1+\delta)}{\delta}}$$

$$= \lim a^x \log a \frac{1}{\log\left\{(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right\}}.$$

Der Grenzwert von $(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$ ist bei abnehmendem δ (und δ wird augenscheinlich $= 0$, wenn $\Delta x = 0$) annähernd 2,718 und wird e genannt.[1]) Daher ist in der Grenze

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a \frac{1}{\log e}.$$

Dieses Ergebnis ist von dem Logarithmensystem unabhängig. Es gilt für „allgemeine Logarithmen". Nehmen wir e als Basis (d. h. gebrauchen wir das Nepersche System), so ist $\log e = 1$, und das Resultat vereinfacht sich auf

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a.$$

Endlich, ist $a = e$, so vereinfacht sich das Ergebnis noch mehr, da $\log e = 1$. Wir erhalten dann

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Von nun an wollen wir allgemeine Logarithmen mit „Log" und die Neperschen mit „log" bezeichnen. Jede andere Art von Logarithmen wird mit „$\log_b$" bezeichnet, wo der Index b die Basis des Systems kennzeichnet.

---

1) Diese fundamentale Größe kann folgendermaßen geschildert werden: Nehmen wir an, daß für ein „25-jähriges Geschäft" ein 4% Zinsfuß ausbedungen worden ist. Bei *jährlicher* Verzinsung wächst 1 Mark während der 25 Jahre auf $(1{,}04)^{25}$ an. Bei *halbjährlicher* Verzinsung während derselben 25 Jahre wird sie $(1{,}02)^{50}$; bei *vierteljährlicher* Verzinsung $(1{,}01)^{100}$; bei *täglicher* $\left(1+\frac{4}{36\,500}\right)^{\frac{36\,500}{4}}$; endlich bei *momentaner* Verzinsung $\lim\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$ oder e. So ist e einfach der Betrag von 1 Mark, die während der ganzen „Geschäftsperiode" *momentan* verzinst worden ist. Letzterer ist $= 2{,}718$, während bei *vierteljährlicher* Verzinsung der Betrag von 2,705 und bei *jährlicher* Verzinsung der Betrag von M. 2,666 erreicht würde.

44. Wir gehen nun zu den Umkehrungen aller soeben erörterten Funktionen über.

$y = \text{arc}\sin x$ bedeutet, daß y der Bogen ist, dessen Sinus $= x$ ist (manchmal wird die Bezeichnung $\sin^{-1} x$ gebraucht), d. h. es ist mit der Relation

$$x = \sin y$$

gleichbedeutend. Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Aber $\frac{dx}{dy}$ ist dem $\frac{dy}{dx}$ gegenüber invers, da diese Ausdrücke die Grenzwerte von $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ resp. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sind, welche Umkehrungen voneinander bilden. Es ergibt sich also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

oder

$$\frac{d(\text{arc}\sin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

In ähnlicher Weise folgt

$$\frac{d(\text{arc}\cos x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

45. Ist $y = \text{arc}\tan x$, so ist $x = \tan y$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$
$$= \sec^2 y$$
$$= 1 + \tan^2 y$$
$$= 1 + x^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2},$$

oder

$$\frac{d(\text{arc}\tan x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Und ähnlich ist

$$\frac{d(\text{arc}\cot x)}{dx} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

46. Ist $y = \log x$, so ist $x = b^y$, wo b die Basis des Systems ist. Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dy} = b^y \cdot \log_b b \frac{1}{\log_b e}.$$

Nun aber ist $\log_b b = 1$; das gibt $\frac{dx}{dy} = b^y \cdot \frac{1}{\log_b e} = \frac{x}{\log_b e}$, folglich ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_b e}{x}$.

Dieses Ergebnis hängt von keinem besonderen Logarithmensystem ab. Bei $b = e$ ist $\log_b e = 1$, und das Resultat vereinfacht sich wie folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \text{oder} \quad dy = \frac{dx}{x}.$$

47. Wir wollen nun den in den §§ 16 und 33 erörterten Satz immer mehr verallgemeinern. Die Zahl n wurde auf den Bereich der ganzen Zahlen beschränkt. Ist aber $y = x^n$ gegeben, wo n eine *beliebige reelle Zahl* bedeutet, so gilt

$$y = e^{n \log x}, \tag{1}$$

da erstens $x = e^{\log x}$ ist, laut der Definition selbst der Logarithmen (d. h.: der Logarithmus einer Zahl ist diejenige Potenz, in welche e erhoben werden muß, um diese Zahl zu erzeugen); und zweitens, da $x = e^{\log x}$ ist, so folgt, daß $x^n = e^{n \log x}$. Hiernach kann $y = x^n$ in der Form $y = e^{n \log x}$ geschrieben werden.

Nun mag

$$z = n \log x \tag{2}$$

sein, so daß

$$y = e^z. \tag{3}$$

Kraft § 35 ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{4}$$

Die Werte von $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{dz}{dx}$ werden aus den Gleichungen (3) bezw. (2) ohne weiteres ermittelt. Somit ergibt sich: aus (3), kraft § 43,

$$\frac{dy}{dz} = e^z,$$

aus (2), kraft § 46,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{n}{x}.$$

Setzen wir diese Werte in (4) ein, so erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = e^z \cdot \frac{n}{x} = e^{n \log x} \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = n x^{n-1}.$$

Also ist die Beschränkung der §§ 16 und 33, daß n eine ganze Zahl sein müsse, nunmehr beseitigt. Es kann ein Bruch, eine irrationale Zahl oder irgend eine reelle Zahl sein.

Beispiele. 1. Man bilde den Differentialquotienten von:

$$x^{\frac{3}{2}}, \quad x^{\frac{7}{2}}, \quad x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad \sqrt[5]{x}, \quad x^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2. Von: $\sqrt{1 + x^2}$, $\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{a + b\sqrt{x} + cx^{\frac{5}{6}}}$.

48. Die Ergebnisse dieses Kapitels können folgendermaßen rekapituliert werden:

Direkte Funktionen:	Inverse Funktionen:
$d(x^n) = nx^{n-1}dx,$	
$d(mx^n) = mnx^{n-1}dx,$	
$d(\sin x) = \cos x\, dx,$	$d(\operatorname{arc} \sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$
$d(\cos x) = -\sin x\, dx,$	$d(\operatorname{arc} \cos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$
$d(\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x},$	$d(\operatorname{arc} \tan x) = \frac{dx}{1+x^2},$
$d(\cot x) = \frac{-dx}{\sin^2 x},$	$d(\operatorname{arc} \cot x) = \frac{-dx}{1+x^2},$
$d(a^x) = \frac{a^x \operatorname{Log} a\, dx}{\operatorname{Log} e},$	$d(\operatorname{Log} x) = \frac{dx}{x} \operatorname{Log} e,$
$= a^x \cdot \log a\, dx,$	$d(\log x) = \frac{dx}{x}.$
$d(e^x) = e^x \cdot dx.$	

Für x^n (oder für die allgemeinere Form ax^n) ist keine inverse Funktion angegeben, weil in diesem Falle die inverse Funktion mit der direkten identisch ist.

(So bei $y = x^n$ ist $x = y^{\frac{1}{n}} = y^m$, d. h. eine mit x^n identische Form, dessen Umkehrung.)

49. Beispiele.

1. Man differentiiere $3 \sin x$. — $-3 \cos x$
2. Man differentiiere $1 - a \sin x + b \cos x$. — $a \cos x + b \sin x$
3. Man differentiiere $2 \sin x \cos x$. — $-\cos x \sin x$
4. Man differentiiere $\sin x \tan x$.
5. Nan differentiiere $\cot x + x^2 \cos x$.
6. Man differentiiere $\log x + \tan x \cos x$.
7. Man differentiiere $x^2 a^x$. — $2x + a^x \log a$
8. Man differentiiere $(a \log x - bx^2 + ca^x)(1 - x^3)$.
9. Man differentiiere $\sin 3x$.
10. Man differentiiere $\cos x^2$.
11. Man differentiiere $\tan(1 + x + x^2)$.
12. Man differentiiere $\log x^3 + \frac{1}{x} + x \tan(x + a^x - \operatorname{arc} \cos 3x)$.

Kapitel IV.

Sukzessive Differentiation — Maxima und Minima.

50. Die Ableitung von $2x^4$ ist bekanntlich $8x^3$. Die Ableitung von $8x^3$ ist $= 24x^2$. Die Ableitung von einer Ableitung wird *zweite Ableitung* der ursprünglichen Funktion genannt.

Ist $F(x)$ die ursprüngliche Funktion und $F'(x)$ deren Ableitung (um Mißverständnisse zu vermeiden, müssen wir sie nunmehr *erste* Ableitung nennen), so bedeuten: $F''(x)$ die zweite Ableitung, $F'''(x)$ die dritte (d. h. die Ableitung von $F''(x)$) usw.

Anderseits, wenn wir für die erste Ableitung die Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ gebrauchen, so ist offenbar die zweite Ableitung:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

was gewöhnlich auf: $\frac{d^2y}{dx^2}$ abgekürzt wird; ebenso wird die dritte, oder $\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx}\right)}{dx}$, in der Form $\frac{d^3y}{dx^3}$ geschrieben, die vierte $\frac{d^4y}{dx^4}$, die fünfte $\frac{d^5y}{dx^5}$ usw.

51. Beispiele.

1. Man bilde die dritte Ableitung von x^5.
2. Man bilde die zweite, dritte, vierte Ableitung von x^2.
3. Man differentiiere sukzessive ax^n. Wann sind die Antworten Null, falls dies überhaupt eintritt? Was für eine Zahl muß n sein, um zu solchem Ergebnisse zu führen?
4. Man differentiiere sukzessive $\sin x$.
5. Man differentiiere sukzessive $\tan x$.
6. Man differentiiere sukzessive a^x.
7. Man differentiiere sukzessive $\arcsin x$.
8. Man differentiiere sukzessive $\arctan x$.
9. Man differentiiere sukzessive $\log x$.

52. Ähnlich wie die erste Ableitung Licht auf die Probleme der Geschwindigkeit, der Tangentialneigung usw. geworfen hat, beleuchtet die zweite Ableitung die Fragen der Beschleunigung, der Krümmung usw.

Wir haben gesehen, daß, wenn für einen fallenden Körper die Gleichung

$$s = 16\,t^2$$

besteht, so ist

$$\frac{ds}{dt} = 32\,t; \tag{1}$$

hieraus folgt

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 32. \tag{2}$$

Wir können dieses Ergebnis besser verstehen, wenn wir $\frac{ds}{dt}$ mit v, wie in § 6 bezeichnen, so daß die Gleichung (1) in

$$v = 32\,t \tag{1'}$$

und (2) in

$$\frac{dv}{dt} = 32 \tag{2'}$$

übergehen, wo $\frac{dv}{dt}$ offenbar einfach $\frac{d^2s}{dt^2}$ ist, da beide nur Abkürzungen des Ausdruckes

$$\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}$$

sind.

Was bedeuten die Gleichungen (2) und (2)'? $\frac{dv}{dt}$ *bedeutet das Maß, in dem die Geschwindigkeit des Körpers zunimmt.* Es ist klar, daß die Geschwindigkeit sich bewegender Körper entweder wächst oder abnimmt, und daß die einen stärker zunehmen oder abnehmen, als die anderen.

Die Zunahme und Abnahme hängen gar nicht mit der Geschwindigkeit der Bewegung zusammen. Ein sich langsam bewegender Körper kann sehr stark an Geschwindigkeit zunehmen, während ein sich schnell bewegender Körper gar nicht zunehmen oder sogar abnehmen kann.

Wenn wir den Terminus Velo gebrauchen, um die Geschwindigkeitseinheit zu bezeichnen (d. h. 1 Fuß pro Sekunde), so wissen wir aus (1), daß ein Körper, der 2 Sekunden gefallen ist, die Geschwindigkeit von 64 Velos besitzt, während am Ende der 5. Sekunde seine Geschwindigkeit 160 Velos erreicht. Dies

ist eine Zunahme von 96 Velos binnen 3 Sekunden, oder durchschnittlich 32 Velos pro Sekunde.

Dies schließt zwar nicht in sich ein, daß der Körper während der ganzen Zeit im Verhältnis von 32 Velos pro Sekunde zugenommen hat. Aber die Gleichung (2) sagt uns, daß dies tatsächlich stattfindet. Ein auf die Erde fallender Körper nimmt *konstant* an Geschwindigkeit zu im Verhältnis von 32 Velos pro Sekunde.

Das Verhältnis der *Geschwindigkeitszunahme* wird Beschleunigung genannt, und wir sehen daher, daß ein fallender Körper ein Beispiel „der gleichmäßig beschleunigten Bewegung" ist.

Es ist zu beachten, daß die Beschleunigung oder das Maß der Geschwindigkeitszunahme, die in 32 Velos pro Sekunde ausgedrückt ist, in einer bestimmten Zahl *Fuß* pro Sekunde nicht ausgedrückt werden kann. Im Gegenteil, wenn wir für das Wort „Velos" dessen Definition: „Fuß pro Sekunde" einsetzen, so sehen wir, daß 32 Velos pro Sekunde mit *32 Fuß p./sec. pro Sekunde* gleichbedeutend sind.

Ist die Entfernung, die der Körper während der Zeit t zurücklegt, nicht $16\,t^2$, sondern $10\,t^3$, so ist dessen Geschwindigkeit $30\,t^2$ und seine Beschleunigung $60\,t$. Mit anderen Worten: die Beschleunigung hängt in diesem Falle von der Zeit ab. Ist der Körper 2 Sekunden gefallen, so ist seine Beschleunigung 120 Velos pro Sekunde, bei 3 Sekunden 180 Velos pro Sekunde usw.

53. Ist $F(x)$ die Ordinate eines jeden Punktes einer Kurve bei der Abszisse x, so, haben wir gesehen, drückt $F'(x)$ die Tangentialneigung in diesem Punkte aus. Was stellt nun $F''(x)$ dar? Augenscheinlich das Maß, in dem sich die Neigung in diesem Punkte mit wachsendem x ändert. Es stellt das dar, was wir *Krümmung* in diesem Punkte in bezug auf die x-Achse nennen können. Die Krümmung wird jedoch gewöhnlich in bezug auf die Tangente selbst gemessen. Der Ausdruck für diese Krümmung im eigentlichen Sinne ist ein klein wenig

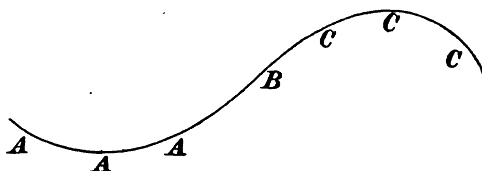


Fig. 5.

A das Maß der positiven Neigungszunahme; *B* „Wendepunkt", Null; *C* das Maß der negativen Neigungszunahme.

komplizierterer. In einem Punkte, wo die Kurve horizontal verläuft, sind die zwei Krümmungsarten identisch.

54. Wenn die Kurve horizontal ist, so ist die Neigung der Tangente $F'(x)$, wie gesagt, gleich Null. Aber die Kurve kann in dreierlei Punkten horizontal sein: im Maximum, wie es in A und D (Fig. 6) der Fall ist, oder im Minimum, wie in C, oder endlich im horizontalen Wendepunkte, wie in B.



Fig. 6.
Punkte mit der Neigung Null: A Maximum; B horizontaler Wendepunkt; C Minimum; D Maximum.

Ein Maximum einer Kurve ist solch ein Punkt, dessen Ordinate y größer ist, als die Ordinaten der von beiden Seiten benachbarten Punkte. (Der Ausdruck „benachbarte Punkte" bedeutet alle Punkte, die innerhalb einer gewissen endlichen Entfernung von beiden Seiten auf der Kurve liegen.) Ein Minimum ist ein Punkt, dessen Ordinate kleiner ist, als die der von beiden Seiten benachbarten Punkte. Ein Wendepunkt wird dadurch charakterisiert, daß die benachbarten Teile der Kurve, die von entgegengesetzten Seiten des Punktes laufen, sich von entgegengesetzten Seiten der Tangente, wie in B (Fig. 5 und 6), befinden.

In der Nachbarschaft links vom Maximum ist die Neigung der Kurve positiv, während sie rechts negativ ist. Für ein Minimum ist die Neigung negativ von der linken Seite und von der rechten positiv. Endlich für einen horizontalen Wendepunkt ist die Neigung von beiden Seiten positiv oder von beiden Seiten negativ.

Es muß beachtet werden, daß eine Kurve mehr als ein Maximum und Minimum haben kann, und daß eine Maximumordinate *nicht* als die größte von allen Ordinaten, sondern nur als die größte in bezug auf ihre Nachbarschaft aufzufassen ist. So ist z. B. die Ordinate in D ein Maximum, obwohl die Ordinate in A größer ist.

55. Ohne zur Symbolik der Kurve Zuflucht zu nehmen, kann man leicht einsehen, daß, wenn eine Funktion $F(x)$ ein Maximum oder Minimum erreicht, $F'(x) = 0$ ist, da $F'(x)$

das Maß der Zunahme von $F(x)$ darstellt; in einem Maximum oder Minimum ist dieses Maß gleich Null.

Aber wenn wir umgekehrt $F'(x) = 0$ haben, so wissen wir nur, daß für diesen besonderen Wert von x, der dieser Gleichung genügt, $F'(x)$ weder wächst, noch abnimmt. Wir können nicht sagen, ob es ein Maximum, ein Minimum oder ein stationärer Wendungswert ist (d. h. solch ein Wert, daß $F(x)$ bei einer Änderung des x in einer Richtung wachsen und in anderer Richtung abnehmen wird).

56. Jetzt können diese Fragen auf festen Grund gestellt werden, indem man zur zweiten Ableitung Zuflucht nimmt, mit der Voraussetzung, daß dieselbe nicht gleichfalls Null ist.

Ist die zweite Ableitung positiv, so ist die Funktion ein Minimum; ist sie dagegen negativ, so ist die letztere ein Maximum. Dies wird uns klar, wenn wir uns an die Bedeutung der zweiten Ableitung erinnern. Sie bedeutet das Maß der Neigungsänderung. Ist sie positiv, so bedeutet sie eine Zunahme der Neigung; ist sie dagegen negativ, so bedeutet sie eine Abnahme derselben.

Wenn also in einem Punkte, wo die erste Ableitung oder Neigung gleich Null sind, die zweite Ableitung oder „Krümmung“ (§ 53) positiv ist, so wissen wir, daß in diesem Punkte die Neigung *zunimmt*. Da aber deren gegenwärtiger Wert $= 0$ ist, so muß sie im Übergange von einem *negativen* Werte in einen *positiven* begriffen sein. Dies kann offenbar nur in einem Minimum geschehen. — *Umgekehrt*, ist die zweite Ableitung negativ, so bedeutet es eine *Abnahme*, d. h. (da die Neigung $= 0$ ist) einen Übergang vom positiven in einen negativen Wert. Dies ist offenbar nur beim Maximum und nirgends mehr der Fall.

Wollen wir z. B. die Funktion $x^3 - 27x$ nehmen. Ihre erste Ableitung ist $3x^2 - 27$ und die zweite: $6x$. Setzen wir den ersten Ausdruck gleich Null und lösen diese Gleichung auf, so finden wir $x = \pm 3$; das bedeutet, daß die Funktion $x^3 - 27x$ zwei Punkte besitzt, in denen sie stationär ist (oder die Tangente horizontal ist), u. zw. bei $x = +3$ und bei $x = -3$. Der erste Punkt ist ein Minimum, der zweite ein Maximum, weil die zweite Ableitung $6x$ für $x = 3$ positiv und für $x = -3$ negativ ist.

57. Der Ausnahmefall, der in § 56 erwähnt worden ist (nämlich, wo der Wert von x, der die erste Ableitung gleich

Null macht, auch die zweite Ableitung gleich Null macht), kommt in der Praxis sehr selten vor. Wenn er aber stattfindet, so können wir die Beschaffenheit der Funktion in diesem Punkte nur mit Hilfe der dritten Ableitung bestimmen. Ist letztere positiv, so befindet sich die Funktion weder im Maximum, noch im Minimum, sondern im horizontalen Wendepunkte, wie z. B. in A (Fig. 7), wo mit wechselndem x auch die Funktion sowohl vor wie nach dem Punkte A beständig in Zunahme begriffen war. Ist anderseits die dritte Ableitung negativ, so befindet sich die Funktion in einem horizontalen Wendepunkte, wie z. B. in B (Fig. 6), wo die Funktion in ständiger Abnahme sowohl vor wie nach Erreichung des Punktes B begriffen war. Ist endlich die dritte Ableitung gleich Null, so werden wir wieder in Unwissenheit über die Beschaffenheit der Funktion gelassen und haben zur vierten Ableitung fortzuschreiten. Wir behandeln dieselbe ganz ebenso, als ob sie die zweite Ableitung wäre. Wird sie gleich Null und nötigt sie uns, die fünfte Ableitung in Betracht zu ziehen, so verfahren wir mit dieser genau so, als ob sie die dritte wäre und so fort.

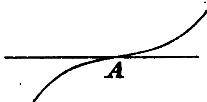


Fig. 7.

Also, *solange die aufeinanderfolgenden Ableitungen Null ergeben, schreiten wir vor, bis wir eine Ableitung finden, die von Null verschieden ist. Ist diese Ableitung von einer* geraden *Ordnung* (d. h. 2te, 4te u. f. Ableitungen), *so wissen wir, daß die Funktion entweder ein Maximum oder ein Minimum ist, und daß sie dies oder anderes ist, je nachdem die betreffende Ableitung das positive oder negative Vorzeichen hat.* Ist aber die nicht verschwindende Ableitung von einer ungeraden Ordnung (d. h. die 3te, 5te usw.), so wissen wir, daß die Funktion weder den maximalen noch den minimalen Wert hat, daß sie vielmehr sich in einem Wendepunkte befindet und im Zunehmen oder Abnehmen begriffen ist, je nachdem die Ableitung das positive oder negative Vorzeichen hat.

58. Wir werden hier den zum vollständigen Beweise der Richtigkeit des vorhergehenden Abschnittes erforderlichen Raum nicht widmen; wir wollen nur den ersten Schritt andeuten, dem Leser, der es wünscht, die Ausführung des Beweises überlassend.

Nehmen wir an, daß wir bei Untersuchung der Funktion $F(x)$ für den Wert von x, der $F'(x) = 0$ ergibt, finden, daß $F''(x)$ gleichfalls Null ist und daß $F'''(x)$ das positive Vorzeichen hat. Indem wir diesen Wert von x mit x_1 bezeichnen, können wir die Aufgabe wie folgt formulieren: Gegeben sind

$$F'(x_1) = 0,$$
$$F''(x_1) = 0,$$
$$F'''(x_1) > 0;$$

es ist die Beschaffenheit von $F(x_1)$ zu bestimmen.

Wir wollen die Lösung mit Hilfe von Rückschlüssen von F''' auf F'', F' und F finden.

Da $F'''(x_1)$ positiv ist, so beweist es, daß $F''(x)$ mit wachsendem x *zunimmt*. Da aber $F''(x_1) = 0$ ist, so beweist die Tatsache der Zunahme von $F''(x)$, daß es von $F''(x_1)$ negativ und nachher positiv verlief. Dies ist unsere Folgerung für F''.

Da $F''(x)$ vor Erreichung des $F''(x_1)$ negativ war, so ist es der Beweis dafür, daß F' *dort* in Abnahme begriffen war und da $F''(x)$ nachher positiv war, so war *dort* $F'(x)$ offenbar in Zunahme begriffen.

Ist aber $F'(x)$ in $F'(x_1)$ gleich Null und, hat es zuerst abgenommen und später zugenommen, so mußte es in beiden Fällen positiv sein. Dies ist unser Schluß für F'. Wenn endlich F' das positive Vorzeichen in beiden Lagen behält, so beweist dies, daß $F(x)$ ständig zugenommen hat, und daher kein Maximum, sondern ein horizontaler Wendepunkt ist.

Es sei

$$F(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 7.$$

Hieraus ergeben sich

$$F'(x) = 4x^3 - 12x + 8,$$
$$F''(x) = 12x^2 - 12$$

und

$$F'''(x) = 24x.$$

Die Wurzeln von $F' = 0$ sind 1 und -2. Für $x = 1$ verschwindet F'' und F''' ist positiv. Daraus folgern wir, daß F, oder $x^4 - 6x^2 + 8x + 7$, in einem stationären Wendepunkte von beiden Seiten zunimmt, wenn x im Wachsen begriffen ist. Aber für $x = -2$ ist F'' positiv. Daher ist F für diesen Wert von x ein Minimum.

59. Beispiele. 1. Man bestimme das Maximum oder Minimum von x^2.

2. Man bestimme das Maximum oder Minimum von $3x^2 - 27x$.

3. Man bestimme das Maximum oder Minimum von $2x^2 + x + 1$.

4. Man bestimme das Maximum oder Minimum von $x^3 - 12x + 6$.

5. Man bestimme das Maximum oder Minimum von $2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$.

6. Man bestimme das Maximum oder Minimum von $x^3 - 2x + 3x^2 - 4$.

7. Es ist die Beschaffenheit von $x^4 - 24x^3 + 64x + 10$ für $x = 2$ zu bestimmen.

8. Es ist die Beschaffenheit von $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 17$ für $x = -1$ zu bestimmen.

60. Hat $F(x)$ die Form $\varphi(x) + K$, wo K eine beliebige Konstante ist, so wird $F(x)$ für dieselben Werte von x, wie $\varphi(x)$, ein Maximum respektive ein Minimum.

Denn die Beschaffenheit von $F(x)$ und $\varphi(x)$ hängt in bezug auf deren Maxima und Minima ausschließlich von der Beschaffenheit ihrer Ableitungen ab, und die Ableitungen dieser 2 Funktionen (d. h. $\varphi(x) + K$ und $\varphi(x)$) sind offenbar identisch.

Folglich, um den Wert von x zu finden, der

$$x^2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

zu einem Maximum resp. Minimum macht, können wir das konstante Glied weglassen und einfach die Frage stellen, bei welchem Werte von x ein Maximum resp. ein Minimum für x^2 eintritt.

61. Hat $F(x)$ die Form $K \cdot \varphi(x)$, wo K eine *positive* Konstante ist, so sind die Werte von x, für die ein Maximum resp. ein Minimum von $F(x)$ eintritt, mit denjenigen identisch, die $\varphi(x)$ zu einem Maximum resp. Minimum machen.

Ist aber $F(x) = K \cdot \varphi(x)$, wo K eine *negative* Konstante ist, so sind die Werte von x, für die ein Maximum resp. Minimum von $F(x)$ eintritt, mit denjenigen identisch, die $\varphi(x)$ zu einem Minimum resp. Maximum machen.

Die aufeinanderfolgenden Ableitungen dieser 2 Funktionen (d. h. $K\varphi(x)$ und $\varphi(x)$) sind doch:

$$\left.\begin{matrix} K\varphi'(x) \\ K\varphi''(x) \\ \text{usw.} \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{matrix} \varphi'(x) \\ \varphi''(x) \\ \text{usw.} \end{matrix}\right.$$

und augenscheinlich werden genau dieselben Werte von x die zwei ersten Ableitungen gleich Null machen; und wenn K positiv ist, so werden die zweiten Ableitungen entweder dasselbe Vorzeichen haben, oder gleich Null sein; ist aber K negativ, so werden dieselben verschiedene Vorzeichen haben, oder beide $= 0$ sein. Ähnlich verhält es sich mit den beiden dritten Ableitungen u.s.f. Da die Beschaffenheit von F und φ in betreff der Maxima und Minima ausschließlich von den Vorzeichen (+, —, oder 0) ihrer Ableitungen abhängt, so ist der Satz bewiesen.

Demgemäß, um z. B. den Wert von x zu ermitteln, der

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x^2 - x)$$

zu einem Maximum resp. Minimum macht, lassen wir den konstanten Faktor (der offenbar positiv ist) weg und finden die Werte von x, die $x^2 - x$ zu einem Maximum resp. Minimum machen.

Beispiele. 1. Man lege die Sätze der §§ 60 und 61 geometrisch aus.

2. Man bestimme das Maximum resp. Minimum von $5(1+x+x^2)+10$.

3. Man bestimme das Maximum resp. Minimum von $-3x\left(x+1+\frac{17}{x}\right)$.

4. Man bestimme das Maximum resp. Minimum von

$$m\left\{\frac{a(x^2+bx+c)+e}{h}+k\right\}.$$

62. Der Gegenstand der Maxima- und Minimalehre ist einer der wichtigsten in der Infinitesimalrechnung und hat unzählbare Anwendungen in der Geometrie, der Physik und der Volkswirtschaftslehre.

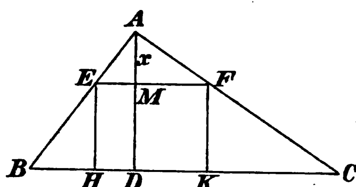


Fig. 8.

Es sei ABC (Fig. 8) ein Dreieck und $EFKH$ ein in dasselbe eingeschriebenes Rechteck. Dieses eingeschriebene Rechteck wird seinen Flächeninhalt mit der Lage ändern. Ist es sehr niedrig und flach, so ist es klein. Ist es hoch und schmal, so ist es auch klein. Zwischen diesen Lagen muß sich eine finden, bei der der Flächeninhalt am größten ist.

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist gleich dem Produkte der Basis HK, oder EF, multipliziert mit der Höhe DM, und die Aufgabe besteht nun darin, daß man findet, wo $EF\cdot DM$ ein Maximum wird.

Zu diesem Zweck haben wir zunächst EF und DM als Funktionen einer bestimmten Veränderlichen auszudrücken. Aus der großen Zahl aller möglichen Größen (z. B. BH, BK, AE, FC, EH, HK usw.) wählen wir AM und bezeichnen sie mit x. Wir setzen ferner $AD=h$ und $BC=a$. Offenbar ist $MD=h-x$. Um EF als Funktion von x auszudrücken, verfahren wir folgendermaßen: Die Dreiecke AEF und ABC sind ähnlich, so daß deren Grundlinien und Höhen proportional sind; das heißt

$$\frac{AM}{AD}=\frac{EF}{BC}, \quad \text{oder} \quad \frac{x}{h}=\frac{EF}{a},$$

woraus

$$EF=\frac{ax}{h}$$

folgt und also

$$EF\times DM=(h-x)\frac{ax}{h}.$$

Wir wollen erfahren, für welchen Wert von x dieser Ausdruck ein Maximum wird. Wir können den positiven konstanten Faktor $\frac{a}{h}$ weglassen und schreiben:

$$(h-x)x \quad \text{oder} \quad hx-x^2;$$

die erste Ableitung davon ist $h - 2x$, was, gleich Null gesetzt und aufgelöst,

$$x = \frac{h}{2}$$

als die gewünschte Antwort ergibt.

Wir sind sicher, daß dies ein Maximum und kein Minimum oder Wendepunkt ist, da die zweite Ableitung gleich -2, d. h. negativ ist.

Wir haben also gelernt, daß das größte in ein Dreieck eingeschriebene Rechteck dasjenige ist, dessen Höhe halb so groß, wie die Höhe des Dreiecks ist.

In der Physik hängen viele wichtige Prinzipien von den Maxima und Minima ab. So ist das Gleichgewicht eines Wasserpfuhles, eines Pendels, eines Schaukelstuhles oder einer Hängebrücke durch die Bedingung bestimmt, daß der Schwerpunkt in jedem dieser Fälle so niedrig wie möglich gelegen sei.

In der Nationalökonomie haben wir die Prinzipien der maximalen Konsumentenrente, des maximalen Profits beim Bestehen eines Monopols, usw.

63. Beispiele.

1. Wie muß eine Gerade geteilt sein, damit das Produkt ihrer beiden Teile ein Maximum wird?
2. Man bestimme den maximalen in einen Rotationskreiskegel eingeschriebenen Zylinder.
3. Man bestimme das größte Rechteck, das sich in einen Halbkreis einschreiben läßt.
4. Ein Rotationszylinder hat einen bestimmten Durchmesser. Wie groß muß dessen Höhe sein, damit das Verhältnis seiner Gesamtoberfläche zum Volumen ein Minimum wird?

   Fingerzeig. — Man drücke das Volumen in Abhängigkeit von der veränderlichen Höhe x und dem konstanten Radius r aus. Alsdann bestimme man, wann $\frac{\text{die Gesamtoberfläche}}{\text{das Volumen}}$ ein Minimum ist.
5. Ist der Preis p eines Artikels festgesetzt und sind dessen Produktionskosten für ein gegebenes Individuum eine Funktion $F(x)$ von der produzierten Menge x, wieviel muß es produzieren, damit sein Gewinn $xp - F(x)$ ein Maximum resp. Minimum wird? Man drücke dies Resultat in Worten aus. Welcher Bedingung muß $F(x)$ genügen, damit der Gewinn ein Maximum und nicht ein Minimum werden darf? Drücken Sie diese Bedingung in Worten aus.

Kapitel V.

Der Taylorsche Lehrsatz.

64. Wir wissen, daß bestimmte Funktionen in Abhängigkeit von Potenzen der Variablen entwickelt werden können. So wird z. B. $(a+x)^4$ nach dem binomischen Lehrsatze gleich

$$a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.$$

Weiter, mit Hilfe gewöhnlicher Division können wir beweisen, daß

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

ist, (sofern x zwischen $+1$ und -1 liegt).

Nun liefert uns die Infinitesimalrechnung eine viel einfachere und allgemeinere Methode derartiger Reihenentwickelung von Funktionen, als es in der Algebra möglich ist.

So sei $\varphi(x)$ eine Funktion von x, die *in folgender Form entwickelbar ist*:

$$\varphi(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 + \cdots,$$

wobei a, A, B, C usw. Konstanten sind, und die Reihe konvergent ist. Wir wollen zeigen, wie man die „unbestimmten Koeffizienten" A, B, C usw. in Abhängigkeit von der einzigen Konstante ausdrücken kann.

Vermittelst sukzessiver Differentiation erhalten wir[1])

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= B + 2C(x-a) + 3D(x-a)^2 + \cdots \\ \varphi''(x) &= \quad 2C \qquad\qquad + 2\cdot 3D(x-a) + \cdots \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen (und die ursprüngliche, von welcher sie abgeleitet sind) für jeden Wert von x gelten, so gelten sie auch, wenn $x = a$ ist.

Dann nehmen sie folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= A, &\quad \text{oder} \quad && A &= \varphi(a); \\ \varphi'(a) &= 1\cdot B, &&& B &= \varphi'(a); \end{aligned}$$

1) Mit Hilfe des § 26, der leicht auf eine unendliche Anzahl von Gliedern ausgedehnt werden kann, wenn, wie hier vorausgesetzt wird, die Summe dieser Glieder konvergiert.

$$\varphi''(a) = 1 \cdot 2 \cdot C, \qquad \text{oder} \qquad C = \frac{\varphi''(a)}{2!};$$

$$\varphi'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3D, \qquad D = \frac{\varphi'''(a)}{3!};$$

usw.

wobei $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ usw.

Wenn man diese Werte von A, B, C, D usw. einsetzt, so hat man

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \varphi''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \varphi'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

65. Diese Reihe, welche den Inhalt des „Taylorschen Lehrsatzes" bildet, drückt die Größe der Funktion φ für jeden beliebigen Wert von x in Abhängigkeit von ihrer Größe und die Größe ihrer Ableitungen für jeden *anderen* Wert von x aus.

So, könnten wir z. B. eine genaue Formel $y = \varphi(x)$ über die Bevölkerungsbewegung in den Vereinigten Staaten für die Zeit (x) angeben, die, angenommen, seit 1800 abgelaufen ist, so sagt uns der Taylorsche Lehrsatz, daß wir die Bevölkerungszahl für 1900, $\varphi(x)$, lediglich auf Grund der Daten der Volkszählung von 1890, $\varphi(a)$, bestimmen könnten.

Als die erste Annäherung nehmen wir die Bevölkerungszahl von 1890 selbst, $\varphi(a)$, an. Da aber die Bevölkerung nicht stationär geblieben ist, so fügen wir eine Berichtigung für die Zunahme während des Dezenniums hinzu. Zuerst nehmen wir an, daß diese Zunahme $= (x - a)\varphi'(a)$ ist, d. h. daß sie gleich ist dem für 1890 festgestellten Zuwachsverhältnisse $\varphi'(a)$, multipliziert mit der Zeit zwischen den 2 Zählungen $(x - a)$. Da letzteres Verhältnis (welches hier im Sinne von Tausenden von Seelen jährlich und nicht *prozentual* aufzufassen ist) nicht stationär geblieben ist, so fügen wir eine zweite Berichtigung $\frac{\varphi''(a)(x-a)^2}{1 \cdot 2}$ hinzu, die sich auf die Annahme stützt, daß das für 1890 festgestellte Maß der Vergrößerung des Zuwachsverhältnisses der Bevölkerung, $\varphi''(a)$, bis 1900 konstant geblieben ist. Damit nicht begnügt, ziehen wir den Grad der Zunahme des Maßes der Zunahme des Zuwachsverhältnisses der Bevölkerung heran und so fort.

66. Geometrisch sagt der Lehrsatz die Tatsache aus, daß die Ordinate eines beliebigen Punktes der Kurve $y = \varphi(x)$ aus der Ordinate, der Neigung, der Krümmung usw. eines beliebigen anderen Punktes ermittelt werden kann.

Es sei OB (Fig. 9) $= x$ und $BD = \varphi(x)$; $OA = a$ und $AC = \varphi(a)$. Der Lehrsatz sagt uns, daß die Ordinate des Punktes D ermittelt werden kann lediglich auf Grund dessen, was über die Kurve in C bekannt ist, und zwar deren Höhe, das Maß, in dem diese Höhe (d. h. die Neigung)

ansteigt, das Maß, in dem diese Neigung wächst (d. h. die „Krümmung", § 53), das Maß, in dem die „Krümmung" zunimmt usw., usw. In der Tat, der Lehrsatz behauptet, daß die Ordinate DB die Summe verschiedener Größen ist: erstens $\varphi(a)$, das durch $B\delta$ dargestellt ist (da dies $= AC$ ist); zweitens $(x-a)\varphi'(a)$, das durch $\delta\delta'$ dargestellt ist (da $\frac{\delta\delta'}{C\delta}$ = der Neigung der Kurve in C und daher gleich $\varphi'(a)$ ist, woraus $\delta\delta' = C\delta \times \varphi'(a) = (x-a)\varphi'(a)$ folgt); drittens $\frac{(x-a)^2\varphi''(a)}{2!}$, das durch $\delta'\delta''$ dargestellt ist, wobei δ'' vermittelst der Konstruktion der Kurve $C\delta''$ erhalten wird, die dieselbe „Krümmung", wie die ursprüngliche Kurve CD im Punkte C hat, und die diese „Krümmung" (in bezug auf die x-Achse, § 53) während ihres ganzen Verlaufes behält; mit anderen Worten, wir nähern uns dem D mit Hilfe dieser sukzessiven Berichtigungen.

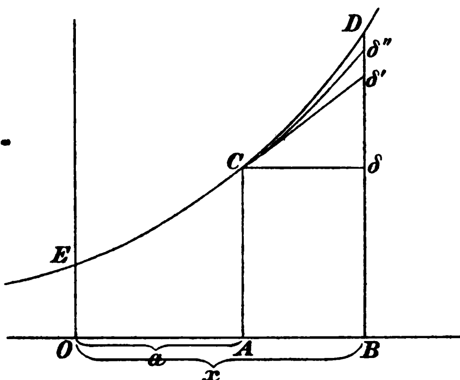


Fig. 9.

δ ist die Lage, die D haben würde, wenn die Ordinate von C an ungeändert geblieben wäre (so daß die Kurve den horizontalen Verlauf angenommen hätte); δ' ist die Lage, die D annehmen würde, wenn das Maß der Zunahme der Ordinate, d. h. die Neigung der Kurve von C an, ungeändert geblieben wäre (so daß die Kurve den Verlauf $C\delta'$ annehmen würde); δ'' ist die Lage, die D annehmen würde, wenn das Maß der Zunahme der Neigung von C an ungeändert geblieben wäre (so daß die Kurve die Richtung $C\delta''$ angenommen hätte) usw.

67. Nehmen wir statt des Punktes C den Punkt E, so daß $a = 0$, so geht der Taylorsche Lehrsatz in die einfache Form über:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)x^2}{2!} + \frac{\varphi'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$

Dies ist der Maclaurinsche Lehrsatz.

Der Leser möge beachten, daß $\varphi(0)$ keineswegs selbst $= 0$ ist. Es ist der besondere Wert von $\varphi(x)$, der erhalten wird, wenn man $x = 0$ setzt. So, ist $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + 117$, dann wird $\varphi(0) = 117$.

68. Eine zweite und öfters vorkommende Ausdrucksweise des Taylorschen Lehrsatzes wird erhalten, wenn man die Abszissen-

differenz $x - a$ mit h bezeichnet und für x in den Ausdruck $a + h$ einsetzt (denn ist $x - a = h$, so wird $x = a + h$), so daß sich

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + \varphi''(a)\frac{h^2}{2!} + \varphi'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

oder, wenn man für a x einsetzt,

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + \varphi''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

ergibt, wobei das x sich nun auf die Abszisse von C statt der von D bezieht.

Der Leser wird auch manchmal diesen Satz in derselben Form, nur mit y an Stelle von h, sehen.

69. Es gibt viele Anwendungen des Taylorschen Lehrsatzes in der Volkswirtschaftslehre. Cournot in seinen *Principes Mathématiques* sowie auch Pareto in seinem *Cours d'économie politique* machen von ihm öfters Gebrauch.

Ist h eine kleine Größe, wie es in manchen Cournotschen Schätzungsbeispielen der Fall ist, so können die höheren Potenzen von h vernachlässigt werden und wir erhalten die Annäherungsformel

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x).$$

Hier wird angenommen, daß, wenn das Intervall AB sehr klein ist, der Punkt δ' annähernd mit D zusammenfallen wird.

70. Es muß hervorgehoben werden, daß in dem Beweise des Taylorschen Lehrsatzes eine Lücke angedeutet worden ist. Es ist nämlich nicht immer möglich, $\varphi(x)$ in die angegebene Reihe zu entwickeln; ein diesbezüglicher Versuch kann sehr wohl eine divergente oder unbestimmte Reihe ergeben.

Es ist unmöglich, in einer so elementaren Abhandlung, wie die vorliegende, die Fälle anzugeben, in welchen der Taylorsche Lehrsatz anwendbar ist. Der Gegenstand ist sehr schwierig und einige der wichtigsten Folgerungen, die sich auf ihn beziehen, wurden erst neuerdings entdeckt.

71. Um die Anwendung des Taylorschen und des Maclaurinschen Lehrsätze zu veranschaulichen, wollen wir sie zur Entwicklung der Funktion $(a+x)^n$ gebrauchen, indem wir sie als entwickelbar voraussetzen.

Da

$$\varphi(x) = (a+x)^n,$$
$$\varphi'(x) = n(a+x)^{n-1},$$
$$\varphi''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2},$$
usw.

so folgt

$$\varphi(0) = a^n,$$
$$\varphi'(0) = na^{n-1},$$
$$\varphi''(0) = n(n-1)a^{n-2},$$
usw.

Also ergibt sich

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)x^2}{2!} + \cdots$$
$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)a^{n-2}x^2}{2!} + \cdots,$$

ein Ergebnis, das uns bereits aus dem binomischen Lehrsatze bekannt ist.

Wollen wir nun $\sin x$ entwickeln, indem wir voraussetzen, daß er entwickelbar ist.

Da

$$\varphi(x) = \sin x, \qquad \varphi(0) = 0,$$
$$\varphi'(x) = \cos x, \qquad \varphi'(0) = 1,$$
$$\varphi''(x) = -\sin x, \qquad \varphi''(0) = 0,$$
$$\varphi'''(x) = -\cos x, \qquad \varphi'''(0) = -1,$$
usw. usw.

so folgt

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)x^2}{2!} + \frac{\varphi'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$
$$= 0 \quad + x \quad + 0 \quad - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Ferner wollen wir $\frac{1}{x-a+1}$ nehmen.

Da

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-a+1}, \qquad \varphi(a) = 1,$$
$$\varphi'(x) = -(x-a+1)^{-2}, \qquad \varphi'(a) = -1,$$
$$\varphi''(x) = 2(x-a+1)^{-3}, \qquad \varphi''(a) = 2,$$
$$\varphi'''(x) = -2\cdot 3(x-a+1)^{-4}, \qquad \varphi'''(a) = -3!$$

so folgt, weil

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \varphi''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \varphi'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots,$$

daß

$$\varphi(x) = 1 - (x-a) + \frac{2(x-a)^2}{2!} - \frac{3!(x-a)^3}{3!} + \cdots.$$

72. Unter anderen wichtigen Anwendungen des Taylorschen und des Maclaurinschen Lehrsätze sind die Berechnungen der fundamentalen Konstanten e und π hervorzuheben.

Um e zu erhalten, entwickeln wir die Funktion e^x

$$\begin{array}{ll} \varphi(x) = e^x, & \varphi(0) = 1, \\ \varphi'(x) = e^x, & \varphi'(0) = 1, \\ \varphi''(x) = e^x, & \varphi''(0) = 1, \\ \text{usw.} & \text{usw.} \end{array}$$

Aus

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)x^2}{2!} + \frac{\varphi'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$

erhalten wir

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 1$, so ergibt sich

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

woraus e mit jedem gewünschten Annäherungsgrade berechnet werden kann. $e = 2{,}71828\ldots$

Um π zu ermitteln, entwickle man $\operatorname{arc}\tan x$

$$\begin{array}{ll} \varphi(x) = \operatorname{arc}\tan x, & \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, & \varphi'(0) = 1. \end{array}$$

Ist x kleiner als Eins, so wissen wir aus der Algebra, daß

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Daraus folgt[1]:

$$\begin{array}{ll} \varphi''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots, & \varphi''(0) = 0, \\ \varphi'''(x) = -2 + 3\cdot 4x^2 - 5\cdot 6x^4 + \cdots, & \varphi'''(0) = -2, \\ \varphi^{IV}(x) = 2\cdot 3\cdot 4x - 4\cdot 5\cdot 6x^3 + \cdots, & \varphi^{IV}(0) = 0, \\ \varphi^{V}(x) = 2\cdot 3\cdot 4 - 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^2 + \cdots, & \varphi^{V}(0) = +4! \\ \text{usw.} & \text{usw.} \end{array}$$

1) Es wird hier ohne Beweis angenommen, daß die eigentlichen Bedingungen der Konvergenz der Reihen erfüllt sind.

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)x^2}{2} + \frac{\varphi'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$

$$\text{arc tan}\, x = 0 \quad + x \quad + 0 \quad + \frac{-2x^3}{3!} \quad + 0 + \frac{4!\,x^5}{5!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Es sei $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so daß arc tan x, d. h. der Bogen, dessen Tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, gleich $\frac{\pi}{6}$ (d. h. einem Bogen von 30 Grad) wird. Die vorhergehende Gleichung geht dann über in:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} - \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right],$$

woraus sich

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right]$$

$$= 3{,}14159\ldots$$

ergibt.

73. Beispiele.

1. Man entwickle $(a - x)^{-2}$ in eine Reihe steigender Potenzen von x.
2. Man entwickle $\sqrt{a - x}$.
3. Man entwickle $\cos x$.
4. Man entwickle $\log(1 + x)$.
5. Man entwickle a^{b+x}.
6. Man entwickle e^{3x}.
7. Man entwickle $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
8. Man entwickle arc sin x.

Kapitel VI.

Integralrechnung.

74. Wir sind bis jetzt mit dem Ableiten der F', F'' usw. vom F beschäftigt gewesen. Es ist aber möglich, dieses Verfahren umzukehren, und vom gegebenen F''', oder irgend einer anderen Ableitung, zu F'', F', F zurückzuschreiten. $F'(x)$ wurde *Ableitung* von $F(x)$ genannt; nunmehr wollen wir $F(x)$ *Ursprung* von $F'(x)$ nennen. Das erste Verfahren der Er-

mittelung des F' vom F bildet den Hauptstoff der *Differentialrechnung*, von der in den vorhergehenden Kapiteln gehandelt worden ist. Das Verfahren, mit Hilfe dessen man F aus F' erhält, bildet den Gegenstand der *Integralrechnung*.

75. Wir haben gesehen, daß in der Differentialrechnung das Resultat der Differentiation entweder in der Form des Differentialquotienten $F'(x)$ oder in der Form des Differentials $F'(x)\,dx$ ausgedrückt wurde. In der Integralrechnung pflegt man nur letztere Form zu gebrauchen. Wir haben $F'(x)\,dx$ *Differential* von $F(x)$ genannt; nun nennen wir $F(x)$ Integral von $F'(x)\,dx$. Wir haben $F'(x)\,dx$ vermittelst der *Differentiation* erhalten. Wir erhalten $F(x)$ aus $F'(x)$ mit Hilfe der *Integration*. Das Symbol der Differentiation war d; das Symbol der Integration ist $\int$.

Da wir wissen, daß $d(x^2) = 2x\,dx$, so können wir schreiben $\int 2x\,dx = x^2$; da weiter

$$dF(x) = F'(x)\,dx$$

in allgemeinster Weise das Verfahren der Differentialrechnung ausdrückt, so drückt

$$\int F'(x)\,dx = F(x)$$

das Verfahren der Integralrechnung aus. Beide Gleichungen stellen dieselbe Tatsache, nur von entgegengesetzten Richtungen betrachtet, fest. Die erste Gleichung liest man: „das Differential von $F(x)$ ist $F'(x)dx$"; die zweite kann gelesen werden: „die Funktion, -deren -Differential -$F'(x)dx$ -ist, ist $F(x)$", da die mit Bindestrichen verbundenen Worte mit dem Ausdruck: „Integral von" gleichbedeutend sind.

Die einfachste Form der obigen Gleichung ist $\int dx = x$.

76. Das Symbol $\int$ war ursprünglich ein langgezogenes S, das das alte Symbol für „Summe von" war (statt dessen man jetzt das griechische Σ zu gebrauchen pflegt). Die Integration wurde als Summation angesehen. Da dy der Grenzwert von Δy, und Δy ein kleiner Teil von y ist, so hat man das Differential dy als einen unendlich kleinen Teil von y aufgefaßt. Eine unendliche Anzahl der dy sollte demgemäß y bilden.

77. Aus $d(x^3) = 3x^2dx$ folgt:

$$\int 3x^2dx = x^3$$

Aber $d(x^3 + 5)$ ist auch $= 3x^2dx$; daraus ergibt sich

$$\int 3x^2dx = x^3 + 5;$$

das Integral von $3x^2dx$ (oder dem Ursprung $3x^2$) kann also x^3, oder $x^3 + 5$ sein, und offenbar auch $x^3 + 17$, oder $x^3 +$ *eine beliebige andere Konstante.* Im allgemeinen ist daher

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Denn der zweite Ausdruck ergibt differentiiert den ersten (§ 27).

Eine willkürliche Konstante (gewöhnlich mit C bezeichnet) muß folglich immer beim Integrieren jedes Differentials hinzugefügt werden, damit das Integral vollständig wird.

78. Es ist keine allgemeine Integrationsmethode bekannt, die der allgemeinen Methode der Differentiation (Kap. I) entspräche. Wir gelangen zum Ursprung einer gegebenen Funktion allein auf dem Wege, daß wir Vorkenntnisse darüber besitzen, welche Funktion differentiiert die vorgelegte ergibt.

79. Es ist

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C,$$

mit der Voraussetzung, daß n nicht $= -1$ ist. Denn das Differential von $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$ ist offenbar $ax^n dx$, wenn nur $n + 1$ nicht gleich Null ist; d. h. wenn n nicht $= -1$ ist.

Die Regel also für die Integration der einfachsten algebraischen Funktionen besteht darin, daß man den Exponenten um Eins erweitert und den Koeffizienten durch den so erweiterten Exponenten dividiert (und dann natürlich noch eine willkürliche Konstante addiert).

So ist z. B.

$$\int 2x^2dx = \tfrac{2}{3}x^3 + C.$$

80. Beispiele.

$$\int 2x dx = ?$$

$$\int 5x^4 dx = ?$$

$$\int 3x^5 dx = ?$$

$$\int \frac{x\,dx}{2} = ?$$

$$\int x^{-2}\,dx = ?$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = ?$$

$$\int \frac{4\,dx}{x^4} = ?$$

81. Es kann zuerst scheinen, daß ein eine willkürliche Konstante enthaltendes Ergebnis wenig Nutzen bringen kann. In der Tat verhält es sich bei weitem nicht so. Obwohl wir die willkürliche Konstante auf Grund des gegebenen Differentials nicht bestimmen können, so sind wir doch imstande, in manchen besonderen Problemen Kenntnisse aus anderer Quelle zu schöpfen, welche uns diese Bestimmung ermöglichen und oft, wie wir sehen werden, brauchen wir überhaupt nicht, die Konstante zu bestimmen. Wir können die Konstante C geometrisch auslegen, indem wir die Gleichung $y = F(x) + C$ zeichnen. Um $F'(x)dx$ oder $F'(x)$ zu ermitteln, hat man die Neigung der Kurve für jeden Wert von x zu bestimmen. Allerdings bestimmt die Neigung der Kurve die Kurve selbst nicht; denn, würde die Kurve nach unten oder nach oben verschoben werden, ohne die Form zu ändern, so würde sie dieselbe Neigung für denselben Wert von x behalten. Die Konstante C bestimmt die vertikale Lage der Kurve. Sie hat nur nichts mit deren Gestalt zu tun.

82. Wir können mit Vorteil dem Plane folgen, den wir zur Einführung in die Differentialrechnung angenommen haben, und mit der Betrachtung mechanischer und geometrischer Anwendungen anfangen.

Wir haben gesehen, daß, wenn uns bekannt, daß ein Körper nach dem Gesetze

$$s = 16t^2 \tag{1}$$

fällt, wir beweisen können, daß dessen Geschwindigkeit in jedem Punkte

$$\frac{ds}{dt} = 32t \tag{2}$$

ist. Nehmen wir jedoch an, es sei uns nur bekannt, daß ein Körper eine durch das Gesetz (2) bestimmte Geschwindigkeit gewonnen hat; können wir auf das Gesetz (1) zurückkommen? Wie gesagt, pflegt man in der Integralrechnung das Differential als Ausgangspunkt anzunehmen. Demgemäß schreiben wir (2) in der Form

$$ds = 32t \cdot dt.$$

Nach Ausführung der Integration haben wir

$$s = \int 32t\,dt = \frac{32t^2}{2} + C = 16t^2 + C. \qquad (3)$$

Obwohl die Gleichung (2), von der wir ausgegangen sind, uns nicht die Möglichkeit gibt, über C zu urteilen, können wir doch C mit Hilfe anderweitiger Kenntnisse bestimmen.

So, wenn wir wissen, daß s von dem Punkte gemessen wurde, in dem der Körper zu fallen anfing, so ist uns auch bekannt, daß bei $t = 0$ ebenfalls s gleich Null sein mußte.

Setzen wir nun $s = 0$ und $t = 0$ in (3) ein, so erhalten wir

$$0 = 0 + C,$$

oder

$$C = 0.$$

Wird schließlich dieser Wert von C in (3) substituiert, so nimmt diese Gleichung die bestimmte Form an:

$$s = 16t^2.$$

83. Allerdings ist C nicht immer $= 0$. Im obigen Beispiele könnten wir nämlich die Entfernung s des fallenden Körpers nicht vom Ausgangspunkte, sondern von einem 27 Fuß höher gelegenen Punkte berechnen. Dann wissen wir, daß für $t = 0$, $s = 27$ ist.

Setzen wir diese Werte in (3) ein, so erhalten wir

$$27 = 0 + C \quad \text{oder} \quad C = 27,$$

und (3) geht in

$$s = 16t^2 + 27$$

über.

Augenscheinlich hängt der Wert von C nur von dem Nullpunkte ab, von dem aus wir s zu messen pflegen.

84. Ebenso, wenn wir nur das Verhältnis zwischen der Neigung einer Kurve $\frac{dy}{dx}$ und deren Abszisse kennen, sind wir imstande, die Gleichung der Kurve bis auf eine willkürliche Konstante, die die vertikale Lage der Kurve regelt, aufzustellen. Dieses Beispiel ist eine genaue Umkehrung der geometrischen

Darstellung in der Differentialrechnung (§ 12). Aber für die Integralrechnung ziehen wir ein anderes geometrisches Beispiel vor.

85. Nehmen wir an, daß uns ein Kurvenstück von $y = f(x)$ gegeben ist (Fig. 10). Geben wir x einen Zuwachs Δx, d. h. AE oder BK, und betrachten wir die entstehende Zunahme der Fläche $OABC$, oder z, und nicht des y.

Der Zuwachs Δz des Flächeninhaltes ist offenbar die kleine Fläche $ABDE$. Diese kleine Fläche ist aber die Summe des Rechtecks $ABKE$ und des kleinen Dreiecks BDK. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist gleich dem Produkt der Grundlinie Δx multipliziert mit der Höhe $f(x)$, so daß

$$\Delta z = f(x) \cdot \Delta x + BDK. \quad (1)$$

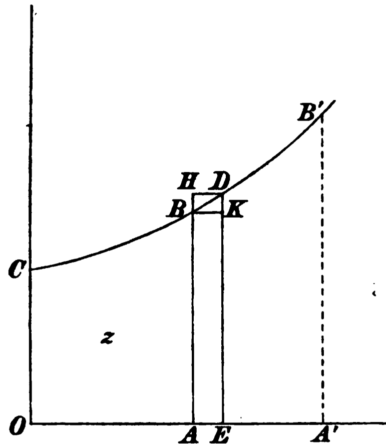


Fig. 10.

Augenscheinlich, je kleiner wir Δx machen, desto kleiner wird die Fläche von BDK im Verhältnis zum kleinen Rechteck, und kann endlich vernachlässigt werden, wobei sich das wichtige Resultat

$$dz = f(x)dx \quad (2)$$

ergibt.

Die hier angegebene Beweisführung ist als eine abgekürzte Form der folgenden anzusehen:

Indem wir (1) durch Δx dividieren, erhalten wir:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f(x) + \frac{BDK}{\Delta x}. \quad (3)$$

Nun ist aber $\frac{BDK}{\Delta x}$ kleiner als

$$\frac{\text{Rechteck } HK}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{\text{Rechteck } HK}{BK}.$$

Der Flächeninhalt eines Rechtecks, dividiert durch seine Grundlinie, ist doch gleich seiner Höhe — in diesem Falle $= DK$.

Also kann (3) in der Form

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f(x) + \text{eine Größe} < DK$$

geschrieben werden.

Es ist einleuchtend, daß, wenn Δx gleich Null wird, auch DK und die „von DK kleinere Größe" gleich Null sein werden, so daß unsere Gleichung in

$$\frac{dz}{dx} = f(x)$$

übergehen wird, die auch in der Gestalt:

$$dz = f(x)\,dx$$

geschrieben werden kann.

Diese Gleichung wird oft auch folgendermaßen:

$$dz = y\,dx, \quad \text{oder} \quad z = \int y\,dx$$

geschrieben, wo y das übliche Symbol für $f(x)$, die Ordinate einer Kurve, ist.

86. Nehmen wir an, daß y, oder $f(x)$, gleich ist

$$3x^2 + 5;$$

das heißt, es sei $y = 3x^2 + 5$ die Gleichung einer Kurve. Die Integralrechnung ermöglicht uns, den Flächeninhalt z in Abhängigkeit von der Abszisse x auszudrücken.

Wir wissen, daß die Gleichungen:

$$dz = (3x^2 + 5)\,dx,$$

$$z = \int(3x^2 + 5)\,dx,$$

$$z = x^3 + 5x + C \qquad (1)$$

bestehen.

Der Leser möge die Richtigkeit dieses Integrals prüfen, indem er es differentiiert und $(3x^2 + 5)dx$ ermittelt.

Es erübrigt noch die Bestimmung von C. Da wir die Absicht hatten, den Flächeninhalt z von der y-Achse ab zu messen, so verschwindet z mit verschwindendem x. Setzen wir in (1) x und z beide gleich Null, so erhalten wir $C = 0$. (Hätten wir den Flächeninhalt von irgend einer anderen Senkrechten, und nicht von der y-Achse ab gemessen, so würden wir einen anderen Wert für C erhalten.) Also geht (1) in $z = x^3 + 5x$ über.

Nehmen wir z. B. an, daß $x = 3$ ist, dann ist $z = 42$. Es beträgt also der Inhalt der Fläche, die von der Kurve $y = 3x^2 + 5$, den Koordinatenachsen und einer von der y-Achse um 3 Einheiten entfernten Senkrechten begrenzt ist, 42 Einheiten. Ist die lineare Einheit ein Zoll, so wird der Flächeninhalt in Quadratzoll lauten.

87. Jetzt sehen wir besser als in § 76, warum die Integration anfangs als Summation aufgefaßt wurde. Der Flächeninhalt z ist offenbar die Summe von sehr vielen Δz und wurde in der Grenze als Summe einer unendlichen Anzahl von dz angesehen.

88. Die Aufgabe der „Quadratur der Kurven" war eine der frühesten und ist eine der wichtigsten Anwendungen der Integralrechnung. Vor der Entdeckung dieses Zweiges der Mathematik konnten nur sehr wenige Kurven, wie der Kreis und die Parabel, so behandelt werden.

89. Wir interessieren uns hier hauptsächlich für die geometrische Symbolik. Wir haben gesehen, daß die *Neigung* einer Kurve der Differentialquotient ihrer Ordinate ist (in bezug auf die Abszisse). Jetzt erfahren wir, daß die *Ordinate* ihrerseits der Differentialquotient des Flächeninhalts ist (auch in bezug auf die Abszisse). Denn $dz = y\,dx$ bedeutet nur $\frac{dz}{dx} = y$.

Wollen wir nun eine Funktion und ihre Ableitung graphisch darstellen, so können wir die Funktion entweder durch die Ordinate y einer Kurve oder durch deren Flächeninhalt bezeichnen, während die Ableitung durch die Neigung resp. die Ordinate gedeutet wird.

Interessieren wir uns hauptsächlich für die *Funktion*, so gebrauchen wir gewöhnlich die erste Methode (wo die Funktion durch die Ordinate dargestellt wird); ist es dagegen für die *Ableitung* der Fall, so gebrauchen wir die zweite (bei der die Ordinate die Ableitung darstellt).

Wir pflegen also die *Ordinate* zur Darstellung der wichtigen Veränderlichen, die von uns erörtert wird, vornehmlich zu gebrauchen.

Jevons hat in seiner *Theory of Political Economy* die Abszisse x zur Bezeichnung der Güter und die Fläche z zur Deutung ihrer vollständigen Nützlichkeit verwendet, so daß die Ordinate y den „Grenznutzen" (d. h. den Differentialquotienten der vollständigen Nützlichkeit in bezug auf die Güter) dargestellt hat. Auspitz und Lieben schildern anderseits in ihren *Untersuchungen über die Theorie des Preises* die vollständige Nützlichkeit mit Hilfe der Ordinate und den Grenznutzen mit Hilfe der Neigung der Kurve.

90. Das Integrationsverfahren ermöglicht uns, nicht nur die erwähnte besondere Quadratur der Kurve auszuführen, sondern

auch einen Flächeninhalt zwischen zwei Grenzen, wie AB und $A'B'$ (Fig. 10) zu ermitteln. Augenscheinlich ist dieser Flächeninhalt gleich der Differenz der Flächeninhalte $OA'B'C$ und $OABC$. Der erste ist der Wert von $\int f(x)\,dx$, wenn OA' (oder x_2) in das bereits berechnete Integral für x eingesetzt wird, während der zweite der Wert desselben Integrals für $x = OA$ (oder x_1) ist. Dies wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,dx,$$

und wird ein *Integral zwischen Grenzen*, oder ein *bestimmtes Integral* genannt.

Der Grund, warum man es bestimmt nennt, ist der, daß es keine willkürliche Konstante enthält, da dieselbe bei Subtraktion des einen Integrals vom anderen sich weghebt.

Also wenn

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

so bedeutet

$$\int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,dx$$

einfach

$$[F(x_2) + C] - [F(x_1) + C],$$

was in $F(x_2) - F(x_1)$ übergeht, da C als in beiden Integralen gleichbedeutend anzunehmen ist.

Der von der Kurve $3x^2 + 5$, der x-Achse und den zwei in $x = 2$ und $x = 4$ gezogenen Senkrechten begrenzte Flächeninhalt ist gleich

$$\int\limits_{x=2}^{x=4} (3x^2 + 5)\,dx = [x^3 + 5x + C]_{x=4} - [x^3 + 5x + C]_{x=2} = 66,$$

weil C sich weggehoben hat, da der Flächeninhalt für jeden dieser Ausdrücke von derselben Senkrechten ab gemessen wird, obwohl es gleichgültig ist, von welcher Senkrechten die Messung vorgenommen wird.

Man pflegt die Bezeichnung der Grenzen abzukürzen; und zwar statt $\int\limits_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$ schreiben wir $\int\limits_{2}^{4} f(x)\,dx$.

91. Es gibt gewisse allgemeine Sätze über die Integration, die den allgemeinen Sätzen der Differentiation (Kapitel II)

entsprechen. Die zwei wichtigsten unter ihnen lauten folgendermaßen:

$$\int Kf(x)\,dx = K\int f(x)\,dx$$

und

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots]\,dx$$
$$= \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \int f_3(x)\,dx \pm \cdots$$

Der Beweis des ersten Satzes ist einfach, da das Integral auf der rechten Seite der vorgelegten Gleichung gleich ist $K(F(x) + C)$, oder $KF(x) + KC$ oder $KF(x) + C'$, wo $F(x)$ den Ursprung von $f(x)$ bedeutet und C eine willkürliche Konstante ist. Aber C könnte ebensogut C geschrieben werden, da dessen Wert ganz beliebig ist. Das Integral auf der linken Seite ist auch gleich $KF(x) + C$, da dieser Ausdruck differentiiert $Kf(x)\,dx$ ergibt.

Der Beweis des zweiten Satzes ist auch nicht schwierig. Bezeichnen wir die ursprünglichen Funktionen von $f_1(x), f_2(x), \ldots$ mit $F_1(x), F_2(x), \ldots$, so ist es klar, daß das Integral auf der rechten Seite in

$$F_1(x) + C_1 \pm F_2(x) + C_2 \pm F_3(x) + C_3 \pm \cdots$$

oder

$$F_1(x) \pm F_2(x) \pm \cdots + C \qquad (1)$$

übergeht, wo $C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$ und daher eine willkürliche Größe ist. Das Integral auf der rechten Seite ist dieselbe Größe (1), da das Differential von (1) (kraft § 26)

$$d(F_1(x) \pm F_2(x) + \cdots + C) = dF_1(x) \pm dF_2(x) + \cdots$$
$$= f_1(x)\,dx \pm f_2(x)\,dx + \cdots = [f_1(x) \pm f_2(x) + \cdots]\,dx$$

ist.

92. Beispiele.

1. Man integriere $(1 + a + b)x^2\,dx$.
2. Man integriere $x^2\,dx + 7x^3\,dx + 5x^5\,dx$.
3. Man integriere $(h + 2)\{cx^4\,dx + kx^6\,dx\}$.
4. Wächst die Geschwindigkeit eines Körpers mit der Zeit nach der Formel $\frac{ds}{dt} = 3t^2$, wie drückt sich die Formel für die zurückgelegte Strecke aus?
5. Wie weit kommt er in dem Zeitraum zwischen $t = 3$ und $t = 5$ Sekunden?
6. Man finde den Ausdruck für den Flächeninhalt (der dem z in der Fig. 10 entspricht) einer Kurve, deren Gleichung $y = 5x^2 + 2$ ist.

7. Wie groß ist der Flächeninhalt für $x=1$? $x=3$? $y=22$?
8. Wie groß ist der Flächeninhalt, der von der Kurve, der x-Achse und den zwei in $x=2$ und $x=4$ gezogenen Senkrechten begrenzt ist?
9. Man löse dieselbe Aufgabe für die Kurven $y=x^3+14$; $y=x^2$ und $y^2=4ax$.
10. Man berechne den Flächeninhalt z für $y=a^x$; $y=\log(x+5)$; $y=\sin x$.

93. Ebenso wie wir sukzessive differentiieren können, sind wir auch imstande, sukzessive zu integrieren.

Führen wir die Integration von

$$\int f(x)\,dx$$

aus und erhalten $f_1(x)$, so können wir

$$\int f_1(x)\,dx$$

nehmen und $f_2(x)$ ermitteln; alsdann

$$\int f_2(x)\,dx,$$

was auf $f_3(x)$ führt usw.

Statt $\int f_1(x)dx$ zu schreiben, können wir für $f_1(x)$ dessen Wert $\int f(x)dx$ einsetzen; dann ergibt sich

$$\int\left[\int f(x)\,dx\right]dx,$$

was jedoch gewöhnlich auf

$$\int\int f(x)\,dx\,dx$$

und sogar

$$\int\int f(x)\,dx^2$$

abgekürzt wird.

Ähnlich können wir schreiben:

$$\int\int\int f(x)\,dx\,dx\,dx, \quad \text{oder} \quad \int\int\int f(x)\,dx^3 \quad \text{usw}$$

Wir können auch das doppelte, dreifache u. s. f. bestimmte Integral aufstellen.

Die volle Form des bestimmten Doppelintegrals wäre

$$\int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{x=h}^{x=k} f(x)\,dx\right]dx;$$

es wird jedoch folgendermaßen abgekürzt

$$\int_a^b\int_h^k f(x)\,dx^2.$$

94. Um diese Begriffe anzuwenden, kommen wir auf unser altes Beispiel eines fallenden Körpers zurück. Nehmen wir an, daß wir zuerst weder $s = 16t^2$, noch $\frac{ds}{dt} = 32t$, sondern nur $\frac{d^2s}{dt^2}$ kennen, d. h. daß uns lediglich bekannt ist, daß die Beschleunigung eine gegebene Konstante ist (32 Velos pro Sek.); der größeren Allgemeinheit halber nennen wir diese Konstante g.

Die gegebene Gleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ bedeutet, wie wir wissen $\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = g$, oder $d\left(\frac{ds}{dt}\right) = g \cdot dt$; nach Integration ergibt sich hieraus

$$\frac{ds}{dt} = gt + C; \tag{1}$$

dies kann aber folgendermaßen geschrieben werden:

$$ds = gt \cdot dt + Cdt,$$

was, integriert, den Ausdruck

$$s = \tfrac{1}{2}\,gt^2 + Ct + K \tag{2}$$

ergibt.

Wir haben noch die willkürlichen Konstanten C und K zu bestimmen. Wird die Entfernung s vom Nullpunkte ab gemessen, dann verschwinden s und t gleichzeitig. Wenn wir für diese beiden Größen Null einsetzen, so erhalten wir

$$K = 0.$$

Es bleibt noch C zu definieren.

Zu diesem Zweck nehmen wir die Gleichung (1) und denken uns, daß der Körper nicht vom Ruhepunkt, sondern mit einer Anfangsgeschwindigkeit von u Fuß pro Sekunde fällt; ist dann $t = 0$, so ist $\frac{ds}{dt} = u$ und (1) geht über in

$$u = 0 + C, \quad \text{oder} \quad C = u.$$

Nun setzen wir die Werte $C = u$ und $K = 0$ in die Gleichung (2) ein und erhalten

$$s = \tfrac{1}{2}\,gt^2 + ut,$$

die allgemeine Gleichung fallender Körper.

95. Das Verfahren, das wir, von der Gleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ ausgehend, detailliert angewandt haben, kann folgendermaßen abgekürzt werden:

$$\begin{aligned} s = \int\!\!\int d^2s &= \int\!\!\int g\,dt^2 \\ &= \int (gt + C)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}gt^2 + Ct + K. \end{aligned}$$

96. Die einfachen transzendenten Integrale werden in folgender Weise ermittelt:

Da $d(\sin x) = \cos x\,dx$, so ist $\int \cos x\,dx = \sin x + C$. Aus $d(\cos x) = -\sin x\,dx$ folgt $\int -\sin x\,dx = \cos x + C$, woraus sich $\int \sin(x)\,dx = -\cos x - C = -\cos x + C$ ergibt, da doch C vollständig willkürlich ist.

Da $d(a^x) = \frac{a^x \operatorname{Log} a\,dx}{\operatorname{Log} e}$, so ist $\int \frac{a^x \operatorname{Log} a\,dx}{\operatorname{Log} e} = a^x + C$, was $\int a^x dx = \frac{a^x \operatorname{Log} e}{\operatorname{Log} a} + C$ ergibt.

Es gilt also auch

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

Ferner, da $d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ist, so ist $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C$. Aus $d \operatorname{arc} \tan x = \frac{dx}{1+x^2}$ folgt $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \tan x + C$. Schließlich aus $d \log x = \frac{dx}{x}$ ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C = \log x + \log K$$
$$= \log(Kx) = \log Cx,$$

weil C und K ganz beliebige Konstanten sind.

97. Wir können die gegebenen Integrationsformeln folgendermaßen zusammenfassen:

$$\int a\,dx = ax + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ (wo } n \text{ nicht } = -1 \text{ ist)},$$

$$\int x^{-1} dx = \log x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x \operatorname{Log} e}{\operatorname{Log} a} + C = \frac{a^x}{\log a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \tan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

98. Abhandlungen über Integralrechnung pflegen sehr umfangreich zu sein, da sie die Berechnung spezieller bestimmter und unbestimmter Integrale, sowie gewisse Kunstgriffe zu deren Auswertung enthalten. In diesem Büchlein, das lediglich den allgemeinsten und grundlegenden Prinzipien gewidmet ist, können wir unsere Auseinandersetzung in diesem Punkte passend zum Abschluß bringen. In der Praxis sind sogar Fortgeschrittenere im Studium der Infinitesimalrechnung gewöhnlich auf Integraltafeln angewiesen. Dem Leser wird hiermit die „Short Table of Integrals" von B. O. Pierce empfohlen. Vollständigere Tafeln bilden große Bände in 4°. Eine absolut vollständige Tafel gibt es nicht, da sehr viele Integrale bis jetzt noch nicht aufgelöst worden sind.

99. Wir dürfen wohl auf ein Hilfsmittel zur Integration hinweisen, das dem Leser schon geläufig ist.

Nehmen wir an, daß

$$x (x^2 + 2)^3 dx$$

zu integrieren ist.

Dies kann offenbar folgendermaßen umgestaltet werden:

$$(x^2 + 2)^3 x dx,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + 2)^3 \, 2x dx,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + 2)^3 \, d(x^2),$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + 2)^3 \, d(x^2 + 2),$$

und in dieser Form kann der Ausdruck leicht integriert werden.

Denn, substituieren wir $u = x^2 + 2$, so haben wir

$$\tfrac{1}{2}u^3 \, du,$$

was integriert $\frac{u^4}{8} + C$, oder $\frac{(x^2 + 2)^4}{8} + C$ ergibt.

Dieser Kunstgriff besteht in der *Änderung der Integrationsveränderlichen,* in der Befreiung des Ausdrucks von dx und in Ersetzung desselben durch das Differential einer anderen Veränderlichen, u, so daß der ganze Ausdruck als Funktion der letzteren geschrieben werden kann.

100. Beispiele.

1. $\int x^{\frac{1}{2}} dx = ?$

2. $\int \sqrt[3]{x} \, dx = ?$

3. $\int \frac{a\,dx}{x^3} = ?$

4. $\int \frac{dx}{(a - x)^5} = ?$

5. $\int \frac{4x\,dx}{(1 - x^2)^2} = ?$

6. $\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{a^9 + b x^9}}$.

7. $\int \frac{dx}{a + x}$.

8. $\int \frac{2bx\,dx}{a - bx^2}$.

9. $\int (a + 3x^2)^3\,dx$

10. $\int \frac{-2\,dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Anhang.

Funktionen von mehreren Veränderlichen.

101. Bis jetzt hatten wir nur mit Funktionen von einer Veränderlichen, wie $x^2 + 2x + 3$, zu tun. Aber die Größe $x^2 + 2xy + 3y^2$, zum Beispiel, ist ihrem Werte nach von *zwei* Veränderlichen, x und y, abhängig, d. h. sie ist eine Funktion von x und y.

Die Relation $z = x^2 + 2xy + 3y^2$, oder allgemeiner ausgedrückt $z = F(x, y)$, sagt aus, daß z eine Funktion von x und y ist, daß also eine Änderung in x oder in y eine Änderung in z hervorruft.

So ist z. B. die Geschwindigkeit eines Segelschiffes eine Funktion der Kraft des Windes und des Winkels, den die Segel mit der Richtung des Windes bilden.

Die Kraft, die durch die Gezeiten erzeugt wird, ist eine Funktion der Entfernung der Erde vom Monde und der Entfernung der ersteren von der Sonne.

Der Preis der Aktien ist eine Funktion von dem Dividendensatze und dem Zinsfuß.

Ebenso drückt $w = F(x, y, z)$ die Tatsache aus, daß w von x, y und z abhängt u. s. f. für eine beliebige Anzahl von Veränderlichen.

So ist die bewegende Kraft des Mondes eine Funktion von dessen Entfernung von der Erde, dessen Entfernung von der Sonne und vom Winkel zwischen diesen beiden Entfernungen.

Der Preis einer türkischen Decke ist eine Funktion von den Preisen ihrer Bestandteile, den Transportkosten, der Höhe der Zollsätze usw.

Wenn die Beschaffenheit eines speziellen Problems verlangt, daß für $w = F(x, y, z)$ das z konstant bleibt, so kann die

Funktion in der Form: $w = \varphi(x, y)$ geschrieben werden; ist auch y konstant, so in der Form: $w = \psi(x)$.

Demgemäß ist die Geschwindigkeit eines Segelschiffes eine Funktion von seinem Winkel zur Richtung des Windes, wenn die Windkraft konstant bleibt.

Der Preis eines wollenen Tuches ist eine Funktion vom Wollpreise, wenn die Produktionskosten konstant bleiben.

102. Da die Bestandteile einer Gleichung umgestellt werden können, so ist es immer möglich, sie alle auf die linke Seite zu bringen und so die rechte Seite auf Null herabzusetzen.

Die Gleichung $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ist mit $y^2 - x^2 - 1 = 0$ gleichbedeutend. Die linke Seite ist hier eine Funktion von x und y. Und im allgemeinen ist es einleuchtend, daß jede Relation zwischen zwei Veränderlichen $y = F(x)$ auf die Form $\varphi(x, y) = 0$ gebracht werden kann. In der ersten Form ausgedrückt wird y eine *explizite* Funktion von x genannt. Ist es dagegen in der letzteren Gestalt ausgedrückt, so wird es eine *implizite* Funktion von x genannt.

In ähnlicher Weise kann jede Relation: $z = F(x, y)$ auf die Form $\varphi(x, y, z) = 0$ gebracht werden; jede Relation $w = F(x, y, z)$ auf die Form $\varphi(x, y, z, w) = 0$ usw.

103. Wir haben gesehen, daß $\varphi\,(x, y) = 0$, oder $y = F(x)$, immer durch eine Kurve mit den zwei Koordinaten x und y gedeutet werden kann. So kann auch $\varphi(x, y, z) = 0$, oder $z = F(x, y)$ vermöge einer *Fläche im Raum*, deren *drei* Koordinaten x, y und z sind, dargestellt werden.

Man zeichne nun drei Achsen, unter geraden Winkeln zueinander gerichtet, wie z. B. die drei Kanten eines Zimmers, die in einer Ecke auf dem Fußboden zusammenlaufen, wobei die x-Achse, sagen wir, gegen Osten, die y-Achse gegen Norden und die z-Achse nach oben gerichtet wären.

Um
$$z = x^2 + 2xy + 3y^2$$
darzustellen, geben wir x einen bestimmten Wert, sagen wir, 2 und y den Wert 1.

Dann wird
$$z = 2^2 + 2 \times 2 \times 1 + 3 \times 1^2 = 11.$$
Man finde den Punkt des Zimmers, der von der Ecke 2 Einheiten östlich, 1 Einheit nördlich und 11 Einheiten hoch ge-

legen ist. Es wird ein Punkt der gesuchten Fläche sein. Indem wir alle möglichen Kombinationen der Werte von x und y nehmen und die sich ergebenden Werte von z ermitteln, können wir *alle* Punkte der Fläche finden.

104. Ist $z = F(x, y)$, so können wir x um Δx variieren, *während y konstant bleibt*, und so einen Zuwachs bei z hervorrufen, der mit Δz bezeichnet wird. Das Grenzverhältnis von Δz zu Δx wird durch

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ oder } \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$$

ausgedrückt und wird *partielle Ableitung* von $F(x, y)$ nach x genannt.

Ähnlich bezeichnet

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ oder } \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

die partielle Ableitung nach y; d. h. die Ableitung, die durch Annahme des x als konstant während der Differentiation erhalten wird.

Man beachte, daß das Symbol ∂ (geschwungenes ∂), welches die *partielle* Differentiation bezeichnet, nicht mit dem geraden d identisch ist.

105. Die geometrische Deutung dieser partiellen Ableitungen kann folgendermaßen veranschaulicht werden. Nehmen wir auf einer Fläche $z = F(x, y)$, — sagen wir der Oberfläche eines steifen Filzhutes — einen bestimmten Punkt P und führen durch denselben eine senkrechte von Osten nach Westen gerichtete Ebene, so schneiden sich die Ebene und die Fläche in einer Kurve, die durch P hindurchgeht. Die Tangentialneigung dieser Kurve in P (oder, wie wir sie nennen dürfen, die O.-W.-Neigung der Fläche selbst) ist $\frac{\partial z}{\partial x}$. Denn die Koordinaten von P sind: x, y, z und die Koordinaten eines Nachbarpunktes Q der Kurve (und daher auch der Fläche) sind: $x + \Delta x, y, z + \Delta z$, wo Δx die Differenz der Werte von x in P und Q und Δz die Differenz der Werte von z ist; die y's sind, laut Voraussetzung, unveränderlich. Die Neigung der Geraden, die P und Q verbindet, ist $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ und ihr Grenzwert lim $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, oder $\frac{\partial z}{\partial x}$, ist die Neigung

der Kurve in P (s. § 12), d. h. die O.-W.-Neigung der Fläche. In ähnlicher Weise ist $\frac{\partial z}{\partial y}$, oder $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$, die nord-südliche Neigung der Fläche.

Diese zwei *primären Neigungen* der Fläche können vermöge zweier geraden Drähte oder Stricknadeln versinnlicht werden, wenn man sie tangentiell im Punkte P, die eine in der O.-W.- und die andere in der N.-S.-Vertikalebene anbringt.

Nehmen wir einen *beliebigen* Nachbarpunkt R der Fläche, so sind dessen Koordinaten: $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, wo die Δ's Differenzen der Koordinaten der Punkte P und R sind.

Verbinden wir nun P und R. Dann stellt $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ nicht die wahre Neigung der Geraden PR, sondern ihre ost-westliche Neigung dar. Es ist das Maß, in dem die Gerade im Verhältnis nicht zum tatsächlichen horizontalen, sondern zum östlichen Vorschreiten ansteigt. Ein Kletterer, der den nord-östlichen Bergrücken besteigt, kann sich um 5 Fuß auf je 3 des horizontalen Vorschreitens heben und dennoch 5 Fuß auf je 2 des östlichen Vorrückens zurücklegen. Wir haben mit dem letzteren, und nicht mit dem ersteren Verhältnis zu tun.

Demgemäß ist auch $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ die nord-südliche Neigung derselben Geraden PR.

Jetzt lassen wir den Punkt R dem P immer näher rücken (längs *eines beliebigen Weges* auf der Oberfläche), bis er schließlich mit diesem Punkte zusammenfällt. Die Gerade PR nähert sich einer Grenzlage, die eine neue Tangente der Oberfläche bildet (eine Tangente der Kurve, die von R bei dessen Herannahen an P auf der Fläche beschrieben wird). Die O.-W.-Neigung dieser Tangente ist gleich $\lim \frac{\Delta z}{\Delta x}$, der $\frac{dz}{dx}$ bezeichnet wird, und ihre N.-S.-Neigung ist gleich $\frac{dz}{dy}$. Stellen wir diese Tangente durch einen dritten Draht dar, so haben wir drei Berührungsdrähte in P, von denen einer in der O.-W.-Vertikalebene liegt, der zweite in der N.-S.-Vertikalebene und der dritte *eine beliebige andere* Tangente ist. Der erste hat keine N.-S.-

Neigung; seine O.-W.-Neigung ist $\frac{\partial z}{\partial x}$. Der zweite hat keine O.-W.-Neigung; seine N.-S.-Neigung ist $\frac{\partial z}{\partial y}$. Der dritte hat beide Neigungsarten, u. zw. $\frac{dz}{dx}$ sowohl wie $\frac{dz}{dy}$.

106. Wie es später bewiesen wird, besteht zwischen diesen verschiedenen Ableitungen folgende Beziehung:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \tag{1}$$

was als abgekürzte Form von:

oder von

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

anzusehen ist.

Die Form (1) besitzt den großen Vorteil der Symmetrie. Sie scheint jedoch die Existenz von $\frac{dy}{dx}$ resp. $\frac{dx}{dy}$ zu verhehlen, die erst in (2) zum Vorschein kommen. Die letzten zwei Größen bedürfen noch einer kleinen Erklärung. $\frac{dy}{dx}$ drückt gar nicht die ansteigende Neigung aus, da es die Senkrechte z nicht enthält. Es ist die Neigung des dritten Drahtes quer durch den Fußboden, das Maß, in dem ein sich auf ihm bewegender Punkt nördlich vorrückt im Verhältnis zu dessen östlichem Fortschreiten.

107. Der Beweis der im letzten Abschnitt angegebenen Formel wird folgendermaßen geführt[1]):

Vor allen Dingen nehmen wir an, daß alle Drähte, die in P die Fläche berühren, in einer und derselben Ebene, die Tangentialebene genannt wird, liegen. Diese Voraussetzung ist mit derjenigen des § 14, daß die progressiven und regressiven Tangenten zusammenfallen, analog. Hat die Fläche in dem gegebenen Punkte eine Ecke oder Falte, so bildet dies eine Ausnahme.

Wollen wir in dieser Ebene die oben besprochenen drei Drähte betrachten, u. zw. die zwei ursprünglichen Drähte (die beziehungsweise in der

1) Um diese Beweisführung zu beherrschen und im Gedächtnis zu behalten, wird der Leser gut tun, sich zu diesem Zweck ein wirkliches physisches Modell zu konstruieren. Dann wird er sie höchst einfach finden.

O.-W.- und der N.-S.-Vertikalebene laufen) und den Draht, der als Grenzlage von PQ ermittelt worden ist. Man nehme einen Punkt Q' auf diesem dritten oder allgemeinen Drahte, dessen Koordinaten: $x + \Delta' x$, $y + \Delta' y$, $z + \Delta' z$ sind. (Die Striche dienen dazu, daß man Q' auf der Tangentialebene von Q auf der Fläche unterscheiden kann.)

Durch Q' gehen zwei Vertikalebenen hindurch, die die Richtungen O.-W. bezw. N.-S. haben. Wir haben bereits zwei solche Ebenen in P. Diese vier Vertikalebenen schneiden die Tangentialebene in einem Parallelogramm, in dem PQ' eine Diagonale ist und die „ursprünglichen" Drähte zwei sich in P schneidende Seiten sind. Man bezeichne die zwei Ecken, denen wir noch keine Buchstaben beigelegt haben, mit H und K; sie liegen in dem O.-W.- beziehungsweise dem N.-S.-Drahte.

Da $\Delta' z$ die Differenz der Lage der Punkte P und Q' ist, so ist es die Summe der Entfernungen von P bis H und von H bis Q' genau so, wie der Höhenunterschied vom Montblanc und dem Meer die Summe der Erhöhungen des Luzerner Sees über dem Meere und des Montblanc über dem Luzerner See. (Es ist unwesentlich, ob H zwischen den Punkten P und Q' liegt, oder nicht, da letzterenfalls einer der erörterten Abstände negativ wird.)

Der Höhenunterschied von P und H ist nun

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta' x,$$

da die Differenz der Lage h zweier Punkte, wie M und N (auf Fig. 11) gleich ist dem Produkte der Neigung von MN multipliziert mit dem horizontalen Abstande a zwischen diesen Punkten (weil die Neigung von $MN = \frac{h}{a}$ ist, woraus $h = a \times$ Neigung von MN sich ergibt). Wir wissen, daß $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Neigung von PQ' und $\Delta' x$ der O.-W.-Abstand der Punkte P und Q' ist und daher auch der O.-W.-Abstand (oder in diesem Falle der horizontale Abstand) zwischen P und H ist (da H und Q' in derselben N.-S.-Ebene liegen).

Fig. 11.

Ferner ist der Höhenunterschied der Punkte H und Q'

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Delta' y.$$

Denn $\frac{\partial z}{\partial y}$ stellt die Neigung von PK dar und ist gleichzeitig die Neigung von HQ', das doch dem PK parallel ist; anderseits ist der N.-S.-Abstand der Punkte P und Q', $\Delta' y$, auch der N.-S.- (in diesem Falle horizontale) Abstand von H und Q' (da H und P in derselben O.-W.-Ebene liegen).

Hieraus ergibt sich

$$\Delta' z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta' x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta' y, \tag{1}$$

das Urbild des gewünschten Resultates. Letzteres kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\Delta' z}{\Delta' x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta' y}{\Delta' x}. \qquad (2)'$$

Nun ist $\frac{\Delta' z}{\Delta' x}$ die O.-W.-Neigung des „allgemeinen Tangentialdrahtes" PQ'. Wir haben aber gesehen, daß $\frac{dz}{dx}$ auch diese Neigung ist. Anderseits ist $\frac{\Delta' y}{\Delta' x}$ die Neigung desselben Drahtes quer durch den Fußboden (das Maß, in dem ein sich auf dem Drahte bewegender Punkt *nordwärts* vorschreitet im Verhältnis zu dessen *östlichem* Vorrücken). Dasselbe gilt aber für $\frac{dy}{dx}$ (§ 106). Setzen wir daher diese Werte für die mit Strichen versehenen Ausdrücke ein, so haben wir

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

was in folgender abgekürzten Form dargestellt werden kann:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Hier wird dz das *vollständige Differential* von z genannt, während $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ und $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ dessen *partielle Differentiale* sind.

Es ist einleuchtend, daß wir zu demselben Resultat gelangen würden, hätten wir mit K ebenso wie mit H und vice versa verfahren und daß wir (1)′ durch $\Delta' y$ statt durch $\Delta' x$ dividieren könnten.

108. Die Formel (1) (§ 106), oder deren zwei alternative Gestalten (2), ermöglichen uns, die Richtung *jeder* Tangente einer Fläche zu ermitteln.

So mag die Fläche

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2$$

gegeben sein und es sei eine Tangente in dem Punkte, in dem x und y die Werte 1 resp. 1 haben, zu bestimmen; z ist offenbar $= 6$.

1. Der ursprüngliche O.-W.-Tangentialdraht hat in diesem Punkte die O.-W.-Neigung $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y = 4$, was durch Differentiation der obigen Gleichung erhalten wird, wobei y als Konstante behandelt wird; die Tangente hat keine N.-S.-Neigung.
2. Der ursprüngliche N.-S.-Tangentialdraht hat in diesem Punkte eine N.-S.-Neigung $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 6y = 8$ und keine O.-W.-Neigung.
3. Der Tangentialdraht, der in der von Nord-Ost nach Süd-West laufenden Vertikalebene liegt, hat folgende O.-W.-Neigung:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= 4 + 8\frac{dy}{dx}$$

$$= 4 + 8 \times 1 = 12,$$

und folgende N.-S.-Neigung:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= 4 \times 1 + 8 = 12.$$

4. Der Tangentialdraht, der in der von Nord-West nach Süd-Ost gerichteten Ebene läuft, hat die folgenden zwei Neigungen:

$$4 + 8\,(-1) = -4$$

und

$$4\,(-1) + 8 = +4.$$

5. Der Tangentialdraht in der Vertikalebene, die zwischen der nördlichen und östlichen Richtung so verläuft, daß sie sich dem Norden doppelt so schnell wie dem Osten nähert,

(d. h. daß $\frac{dy}{dx} = 2$)

hat folgende Neigungen:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= 4 + 8 \times 2 = 20,$$

und

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= 4 \times \tfrac{1}{2} + 8 = 10,$$

und so fort für jeden beliebigen Tangentialdraht.

109. Beispiele.

1. Man finde die Neigungen der fünf oben angegebenen Arten für dieselbe Fläche im Punkte, in dem $x = 3$ und $y = 2$ sind.
2. Im Punkte: $x = -1$, $y = -1$.
3. Im Punkte: $x = 0$, $y = 0$.
4. Für die Fläche $s = x^3 + x^2 + x + xy + y + y^2 + y^3$ im Punkte: $x = 0$, $y = 1$.
5. Für die Fläche
$$z = x^2y - 2x^2y^2 + 3$$
im Punkte: $x = 2$, $x = 3$.
6. Wie groß sind auf derselben Fläche in demselben Punkte die O.-W.- und N.-S.-Neigungen der Tangente, welche nordwärts 3 mal schneller, als ostwärts vorschreitet? 4 mal? $3\frac{1}{2}$ mal?

7. Man beantworte dieselben Fragen für

$$z = \log y + 3^x + xy.$$

110. Haben wir eine Funktion von mehr als zwei Veränderlichen, wie z. B. $w = F(x, y, z)$, so gibt es keine geometrische Deutungsweise, die der Kurve $y = F(x)$ und der Fläche $z = F(x, y)$ entspräche (es sei denn, daß wir eine „vierte Dimension" annehmen und von einer dreidimensionalen „geschweiften Strecke" sprechen, deren Koordinaten x, y, z, w wären!)

Es kann jedoch in einer dem Verfahren des § 107 genau analogen Weise, nur ohne geometrische Veranschaulichung, bewiesen werden, daß

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz.$$

Diese Differentialgleichung ist eine Abkürzung für die drei Gleichungen, die man vermittelst Division durch dx, dy und dz erhält.

Der Satz und dessen Beweis können auf jede Zahl von Veränderlichen ausgedehnt werden.

111. Eine sehr wichtige Anwendung des Prinzips der partiellen Ableitungen ist der Fall, wo wir nur 2 Veränderliche haben, aber y eine implizite Funktion von x ist; d. h. wo $\varphi(x, y) = 0$. Wir können die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ berechnen, ohne genötigt zu sein, zuerst die implizite Funktion in die explizite Form $y = F(x)$ zu bringen.

Ist $x^2 + y^2 = 25$, so können wir $\frac{dy}{dx}$ finden, ohne die Gleichung in $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ zu transformieren.

112. Aus § 106 (2) wissen wir, daß wenn $z = \varphi(x, y)$, so gilt die Relation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

die auch in zwei anderen, im § 106 angegebenen Formen geschrieben werden kann.

Ist $z = 0$, wie in dem erörterten Beispiel der Fall ist, so

wird auch $\frac{dz}{dx} = 0$ (§ 27, Schluß). Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}}.$$

In Worten lautet der Satz folgendermaßen: *Um den Differentialquotienten von y nach x zu finden, wenn die funktionale Abhängigkeit zwischen x und y in der impliziten Form $\varphi(x, y) = 0$ ausgedrückt ist, differentiiere man die Funktion $\varphi(x, y)$ nach x, indem man y als Konstante ansieht, und dann nach y, wobei w als Konstante anzusehen ist. Man nehme alsdann die partielle Ableitung, die aus der ersten Differentiation erhalten wurde, dividiere sie durch die bei der zweiten Differentiation gefundene Ableitung, und gebe dem Ganzen ein negatives Vorzeichen.*

So, wenn $x^2 + y^2 = 25$, oder $x^2 + y^2 - 25 = 0$ gegeben ist, können wir $\frac{dy}{dx}$ in folgender Weise finden:

Die partielle Ableitung von $x^2 + y^2 - 25$ nach x ist $2x$, und nach y, $2y$. Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Dieses Ergebnis ist in Abhängigkeit von x und y ausgedrückt, aber es kann so umgestaltet werden, daß es nur eine Veränderliche enthält. Man setzt nämlich für y dessen Wert, der aus $x^2 + y^2 = 25$ bestimmt werden kann, u. zw. $\pm\sqrt{25 - x^2}$. Dann ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\pm\sqrt{25 - x^2}},$$

was mit dem Resultat identisch ist, welches durch Differentiation der expliziten Form

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

ermittelt werden kann.

113. Beispiele.

1. Man finde $\frac{dy}{dx}$, wenn $xy = 1$.

2. Man finde $\frac{dy}{dx}$, wenn $2x^2 + 3y^2 - 4 = 0$.

3. Man finde $\frac{dy}{dx}$, wenn $ax^2y^3 + bx^3y^2 = 0$.

4. Man finde $\frac{dy}{dx}$, wenn $\frac{x+y}{x-y} + \frac{bx}{cy} + \frac{h}{k} = 0$.

5. Man finde $\frac{dy}{dx}$, wenn $\cos(xy) = x$.

6. Man finde $\frac{dy}{dx}$, wenn $\log(x^2y^2) + x^3 + y^3 + 2xy + a = 0$.

7. Man beweise § 112 geometrisch.

114. Funktionen von mehreren Veränderlichen sind besonders im Gebiete der Volkswirtschaftslehre anwendbar, obwohl sie bis jetzt noch sehr wenig gebraucht worden sind.[1]) Viele Trugschlüsse sind durch diesen Mangel an einer allgemeineren Auffassung der funktionalen Abhängigkeit und durch die stillschweigende Voraussetzung, daß lediglich *Kurven* jeder Art quantitative Beziehung graphisch darzustellen vermögen, verursacht worden. Das ist ein Fehler, der in seiner Entsetzlichkeit nur wenig hinter den Irrtümern derjenigen zurückbleibt, für die der einzige mathematische Begriff der der konstanten Größe ist.

---

1) Vgl. jedoch Edgeworths *Mathematical Psychics,* 1881; des Verfassers *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices,* 1892; Parétos *Cours d'économie politique,* 1896—97.

